ELEMENTI
DI GEOMETRIA

PER

ANNIBALE RIERA

PROFESSORE DI ALGEBRA NEL COLLEGIO MILITARE

TERZA EDIZIONE

ACCRESCIUTA E MIGLIORATA

PARTE PRIMA

NAPOLI
TIPOGRAFIA DELL' UNIONE
Strada Nuova Pizzofalcone, 2
1867

AVVERTIMENTO

Per non interrompere la catena dei teoremi dimostrati in questa prima parte della geometria, si sono riuniti in fine dell'opera, tanto i problemi nei quali si mostra il modo di determinare quelle linee o quei punti che nei teoremi precedenti si sono supposti determinati, perchè incontrastabile la loro esistenza, quanto i problemi che si son creduti adatti, per la loro facilità, a far parte di una istituzione elementare.

Seguendo tale sistema si è stimato superfluo aggiungere la dimostrazione della massima parte di detti problemi, per le due ragioni seguenti: 1.ª che sarà facilissimo all'allievo che ha ben fatto tanto il primo che il secondo libro supplire tale dimostrazione, o da se solo, o dopo averla intesa per una sola volta dal Professore che lo istruisce; 2.ª per forzare in certo modo l'allievo a rinvenire da sè le ragioni che servono a rendere evidente quanto si è asserito.

INDICE

LIBRO PRIMO

Rette perpendicolari, ed oblique.

Rette parallele.

Triangoli.

Quadrilateri.

Cerchio e circonferenza.

Misura dei triangoli e dei quadrilateri.

Misura degli angoli.

LIBRO II.

Rette proporzionali, e figure simili.

Proprietà dei quadrati e dei rettangoli di talune rette.

Poligoni regolari.

Aja del cerchio e rapporto della circonferenza al diametro.

PROBLEMI

§ 1. Da un punto dato su di una retta si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima.
» 2. Dall'estremo di una retta si vuolo innalzare la perpendicolare alla medesima senza prolungarla.
» 3. Da un punto dato fuori di una retta si vuole abbassare la perpendicolare alla medesima.
» 4. Si vuol dividere una retta data in due parti uguali.
» 5. Da un punto dato si vuol condurre la parallela ad una retta data.
» 6. Da un punto dato su di una retta se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima un angolo uguale ad un angolu dato.
» 7. Da un punto dato fuori di una retta se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima un'angolo uguale ad un angolo dato.
» 8. Per un punto dato si vuol condurre una rotta in modo che la parte intercetta tra due parallele date sia quanto una retta data.
» 9. Determinare sopra una retta data un punto tale che congiunto con due punti dati risulti l'angolo d'incidenza uguale all'angolo di riflessione.
» 10. Dati due angoli di un triangolo si vuole determinare il terzo.
» 11. Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo ed i lati che lo comprendono, rispettivamente uguali ad un angolo dato ed a due rette pur date.
» 12. Si vuol costruire un triangolo che abbia un lato e gli angoli al medesimo adiacenti, uguali rispettivamente ad una retta data ed a due angoli pur dati.
» 13. Si vuol costruire un triangolo che abbia i tre lati rispettivamente uguali a tre rette date.
» 14. Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo e due lati, l'uno adiacente e l'altro opposto al detto angolo, uguali rispettivamento ad un angolo dato ed a due rette pur date.
» 15. Si vuol costruire un triangolo equilatero su di una retta data.
» 16. Su di una retta data come lato, si vuol costruire il quadrato.
» 17. Sopra una retta data come diagonale, si vuol costruire il quadrato.
» 18. Si vuol dividere un angolo dato in due parti uguali.
» 19. Si vuol dividere un'angolo retto in tre parti uguali.
» 20. Determinare la bisettrice dell'angolo che farebbero due rette date che non possono prolungarsi fino al loro puuto d'incontro.
» 21. Si vuol trovare il centro di una circonferenza data.
» 22. Per un punto dato su di una circonferenza si vuol condurre la tangente alla medesima.
» 23. Per un punto dato fuori di una circonferenza si vuole condurre una tangente alla medesima.
» 24. Condurre ad una circonferenza data una tangente parallela ad una retta pur data.
» 25. Per un punto dato si vuol condurre ad un cerchio dato una secante tale che la sua parte intercetta nel cerchio sia quanto una retta data.
» 26. Condurre una tangente comune a due cerchi dati.
» 27. Su di una retta data si vuol costruire un segmento di cerchio capace di contenere un angolo datu.
» 28. Si vuol trovare il rapporto numerico di due rotte date, o di due angoli dati.

PARTE PRIMA

GEOMETRIA PIANA

DEFINIZIONI E NOZIONI PRELIMINARI

1. La **Geometria** è la scienza che tratta della misura dei **solidi**, delle **superficie** e delle **linee**.

2. Tutto ciò che sotto forma propria occupa una parte dello spazio dicesi **solido**.

Lo spazio occupato da un solido dicesi **volume** del solido.

Ogni solido à tre dimensioni, che diconsi **lunghezza**, **larghezza**, e **profondità** o **altezza**.

3. L'esterno di ogni solido dicesi **superficie**.

Ogni superficie à due sole dimensioni, che diconsi **lunghezza** e **larghezza**.

4. L'intersezione di due superficie dicesi **linea**. Il limite di una superficie dicesi pure **linea**.

Ogni linea à una sola dimensione, che dicesi **lunghezza**.

5. L'intersezione di due linee dicesi **punto**.

Gli estremi di una linea si dicono pure **punti**.

Il punto non à nessuna dimensione.

6. La linea più corta che può condursi da un punto ad un'altro dicesi **linea retta**.

7. Una linea che è composta di linee rette dicesi **spezzata**.

8. Una linea che non è retta, nè composta di linee rette, dicesi **curva**.

9. Una linea composta di rette e curve dicesi **mista**.

10. La superficie sulla quale una retta posta in direzioni diverse può adattarsi per tutta la sua lunghezza, dicesi **superficie piana**, o semplicemente **piano**.

11. Una superficie che non è piana, nè composta di superficie piane, dicesi **superficie curva**.

12. Per **angolo** s'intende la quantità più o meno grande per la quale due rette che s'incontrano s'allontanano fra loro, avendo riguardo alla posizione rispettiva delle medesime, e non già alla lunghezza.

Le due rette che s'incontrano si dicono **lati dell'angolo**, ed il punto dove s'incontrano **vertice dell'angolo**.

13. Due angoli ABC, ABD (fig. 1) si dicono **adiacenti** o **consecutivi**, quando avendo il vertice B ed un lato AB comune, sono posti, rispetto a questo lato, l'uno da una parte, e l'altro dall'altra.

14. Quando una retta AB (fig. 2 e 3) ne incontra un'altra CD si formano due angoli ABC ed ABD, che possono essere o uguali, o disuguali.

Sono uguali quando la retta AB (fig. 2) non s'inclina più dalla parte BD che dall'altra BC; ed in questo caso la AB si dice **perpendicolare** alla CD; il punto B si dice **piede** della perpendicolare; e ciascuno degli angoli ABC, ABD dicesi **retto**.

Sono disuguali quando la AB (fig. 3) s'inclina più dalla parte BD che dall'altra BC; o viceversa; ed in questo caso la AB si dice **obliqua** alla CD; il punto B si dice **piede** dell'obliqua; l'angolo ABC, maggiore del retto, si dice **ottuso**; e l'altro ABD, minore del retto, dicesi **acuto**.

Da quanto ora si è detto segue che un'angolo dicesi retto quando i suoi lati sono l'uno perpendicolare all'altro.

15. Due angoli ABE e DBC (fig. 4) si dicono **opposti al vertice** quando i lati AB e BE dell'uno, sono rispettivamente per dritto coi lati BC e BD dell'altro.

16. Due angoli si dicono l'uno **complemento** dell'altro quando sommati formano un angolo retto.

17. Due angoli diconsi l'uno **supplemento** dell'altro quando sommati formano due angoli retti.

18. Una superficie piana limitata per ogni dove da linee rette dicesi **figura rettilinea** o **poligona**, o solamente **poligono**.

19. Ciascuna delle rette che limitano un poligono si dice **lato**; e la somma dei lati dicesi **contorno** o **perimetro**.

20. Un poligono si dice **triangolo**, **quadrilatero**, **pentagono**, **esagono**, . . . secondo che a tre, quattro, cinque, sei lati, ecc.

21. Quando i soli punti di una linea data soddisfano ad una proprietà particolare, si dice che là linea data è il **luogo geometrico**, o semplicemente il **luogo** de' punti che soddisfano alla indicata proprietà.

22. Una linea, o una figura i cui punti sono tutti sù d'un piano dicesi linea, o figura **piana**.

DI ALCUNI VOCABOLI USATI IN GEOMETRIA

23. Assioma — è una verità evidente per se stessa.

24. Teorema — è una verità che diviene evidente dopo un ragionamento, che dicesi **dimostrazione**.

25. Problema — è una quistione che à bisogno di **soluzione**.

26. Lemma — è una verità che serve a facilitare la dimostrazione di un teorema, o la soluzione di un problema.

I teoremi, i problemi, ed i lemmi, si dicono in generale **proposizioni**.

27. Corollario — è la conseguenza che deriva da una, o più proposizioni.

28. Scolio — è l'osservazione che si fa dopo una, o più proposizioni.

29. Ipotesi — è lo stesso che supposizione.

30. L'enunciato di ogni proposizione contiene ordinariamente due parti distinte, che sono l'**ipotesi**, e la **tesi** o **conclusione**.

31. Una proposizione si dice **inversa** o **reciproca** di un'altra quando quel che è ipotesi nella prima è tesi nella seconda, e quel che è tesi nella prima è ipotesi nella seconda.

ASSIOMI

32. Il tutto è uguale alla somma delle sue parti, ed è maggiore di ciascuna di esse.

Due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

Se a quantità uguali si aggiungono, o tolgono, quantità uguali, si hanno quantità uguali.

Se a quantità disuguali si-aggiungono, o tolgono, quantità uguali, si hanno quantità disuguali.

Se due quantità sono uguali, le loro metà, o i loro doppi sono pure uguali.

Se una quantità è minore di un'altra, la metà, o il doppio della prima è minore della metà, o del doppio della seconda.

Da un punto ad un'altro non si può condurre che una sola retta.

Una retta può sempre prolungarsi oltre i suoi estremi, ed in un modo solo.

Due rette possono sempre adattarsi l'una sull'altra in modo da confondersi, e formare una sola e medesima retta.

Due angoli complementi, o supplementi di un terzo sono uguali fra loro.

Due linee, due angoli, due figure che combaciano perfettamente sono uguali fra loro.

LIBRO PRIMO

RETTE PERPENDICOLARI, ED OBLIQUE

33. Teorema. *Da un punto B* (fig. 2) *dato su di una retta CD non si può innalzare alla medesima che una sola perpendicolare BA.*

Infatti la retta BA essendo perpendicolare alla CD non s'inclina più dalla parte BC che dall'altra BD; quindi ogni altra retta che passa pel punto B, ed è diversa da BA, dovendo inclinarsi più dalla parte BC che dall'altra BD, o viceversa, non sarà perpendicolare a CD (14); onde è vero l'enunciato teorema.

34. Teor. *Tutti gli angoli retti ABD, EFG* (fig. 5) *sono uguali fra loro.*

Infatti considerando la figura EFG sovrapposta all'altra ABD in modo che il punto F cada sul punto B, e che la retta FG si confonda colla BD, la retta FE dovrà adattarsi sulla BA; poichè se prendesse una posizione BM diversa da BA, ne verrebbe, essendo per ipotesi la FE perpendicolare alla FG, che dallo stesso punto B potrebbero innalzarsi due perpendicolari BA, BM sulla retta BD; la qual cosa è impossibile (33); dunque adattandosi la FE sulla BA, è vero l'enunciato teorema.

35. Teor. *Due angoli adiacenti MBC, MBD* (fig. 5) *che hanno i lati esterni BC, BD in linea retta sono l'uno supplemento dell' altro.*

Dal punto B s'immagini innalzata sulla retta CD la perpendicolare BA. Poichè la somma di due quantità non si altera quando ciò che si toglie all'una si aggiunge all'altra, la quantità angolare che si à dallo addizionare gli angoli dati MBC ed MBD è uguale a quella che risulta dallo addizionare gli altri due ABC ed ABD, che si hanno quando la parte ABM si considera tolta al primo MBC ed aggiunta al secondo MBD; ma la somma degli angoli ABC ed ABD è uguale a due retti, dunque pure la somma degli altri MBC, MBD è uguale a due retti; onde è vero l'en. teor.

Coroll. I due angoli adiacenti che si formano quando una retta ne incontra un'altra sono o entrambi retti, o presi insieme uguali a due retti.

Coroll. La somma di tutti gli angoli consecutivi che possono formarsi in un punto di una retta, e dalla stessa parte della medesima, è sempre uguale a due retti.

36. Teor. *Due angoli adiacenti ABC, ABD* (fig. 6) *che sono l'uno supplemento dell' altro hanno i lati esterni BC, BD in linea retta.*

Poichè supponendo che il prolungamento di CB non sia BD ma BE, si avrà la somma dei nuovi angoli ABC, ABE uguale a quella degli angoli proposti ABC, ABD; perchè ciascuna uguale a due retti; onde togliendo di comune l'angolo ABC, rimarrà ABD=ABE (*leggi ABD uguale ABE*), vale a dire la parte uguale al tutto, ciò che è impossibile; dunque è pure impossibile che una retta diversa dalla BD sia per dritto colla BC; onde è vero l'en. teor.

Defin. La retta che divide un'angolo in due parti uguali dicesi **bisettrice** dell'angolo.

Scolio. Le bisettrici de'due angoli adiacenti supplementari sono l'una perpendicolare all'altra.

37. Teor. *Da un punto A* (fig. 7) *dato fuori di una retta BC non si può abbassare sulla medesima che una sola perpendicolare AB.*

Poichè se potesse abbassarsene un'altra sia questa AC. Si prolunghi la AB finchè sia BD=BA, e si conduca CD.

Considerando la figura ACD piegata secondo la CB, in modo che la parte ABC si adatti sull'altra DBC, la BA cadrà sulla BD (35, 34), il punto A sul punto D, la CA sulla CD, e l'angolo ACB combacerà coll'altro DCB; ma ACB si è supposto retto, dunque pure DCB sarà retto, e per conseguenza AC e DC sono in linea retta; ma ciò è impossibile, perchè per due punti A, D non possono condursi due rette distinte ABD, ACD; dunque è pure impossibile che AC sia perpendicolare a BC; onde è vero l'en. teor.

Scolio. La retta CB compresa tra il piede dell'obliqua AC ed il piede della perpendicolare AB, dicesi **projezione** dell'obliqua AC sulla CB.

38. Teor. *Quando due rette AC,DE* (fig. 4) *si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.*

Infatti i due angoli ABD, EBC sono uguali fra loro, perchè ciascuno è supplemento del terzo ABE; e gli altri due ABE, DBC sono pure uguali fra loro, perchè supplementi del terzo ABD; ma gli angoli ABD, EBC sono opposti al vertice, come pure gli altri due ABE,DBC; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. La somma dei quattro angoli che formano fra loro due rette che si tagliano è uguale a quattro retti.

Coroll. Se uno dei detti quattro angoli è retto, ciascuno degli altri tre sarà pure retto; vale a dire che se la retta AC è perpendicolare a DE, sarà viceversa DE perpendicolare ad AC.

Coroll. La somma di tutti gli angoli consecutivi che possono formarsi in un punto di un piano è uguale a quattro retti.

39. Teor. *Se da un punto A* (fig. 5) *posto fuori di una retta CB si abbassano sulla medesima la perpendicolare AB, ed un' obliqua AC, sarà la perpendicolare più corta dell' obliqua.*

Si prolunghi la perpendicolare AB finchè sia BD=BA, e si conduca DC. Considerando la figura ACD piegata secondo

la CB, in guisa che la parte ABC si adatti sull'altra DBC, la BA cadrà sulla BD, il punto A sul punto D, e la CA sulla CD, onde sarà CA = CD; ma la retta AD è minore della linea spezzata ACD, dunque AB, metà di AD, è pure minore di AC, metà della spezzata ACD; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Dei due angoli ACB, ACF, che l'obliqua AC forma colla BF, quello che rivolge la sua apertura dalla parte della perpendicolare, cioè ACB, è acuto; poichè se fosse ottuso, il suo uguale BCD essendo pure ottuso, la somma degli angoli successivi ACB, BCD, DCE, formati in un punto C e dalla stessa parte dell'obliqua AC prolungata in E, sarebbe maggiore di due retti; ciò che è impossibile (35).

Scolio. La distanza di un punto A ad una retta CB è misurata dalla perpendicolare AB che da quel punto si abbassa sulla retta.

Scolio. Quando due rette AC, CB s'incontrano, la perpendicolare AB abbassata sull'una CB, da un punto qualunque A dell'altra AC, va successivamente crescendo, o decrescendo, a misura che il punto A che si considera si allontana, o si avvicina, al punto C dove le due rette s'incontrano.

Scolio. Una retta AB (fig. 8) che gira intorno ad un punto A, per passare dalla posizione AB nella quale le perpendicolari BP, B'P' . . . abbassate sulla CP dai suoi punti B, B', . . . posti a destra di A, sono tutte minori di AC, alla posizione AD nella quale le perpendicolari DP, D'P', . . . sono tutte maggiori di AC, deve necessariamente passare per la posizione AE nella quale le dette perpendicolari EP, E'P', . . . sono tutte uguali alla AC, e quindi uguali fra loro. Questa posizione eccezionale della retta AE, relativamente all'altra CP, s'indica dicendo che la AE è da per tutto egualmente distante dalla CP.

40. Teor. *Se da un punto A (fig. 9) posto fuori di una retta CD, si abbassano sulla medesima due oblique AC, AD, i cui piedi sono egualmente distanti dal piede della perpendicolare AB, saranno tali oblique uguali fra loro.*

Infatti considerando la figura ACD piegata secondo la AB in modo che la parte ABC si sovrapponga all'altra ABD, la

BC combacerà colla BD (34), il punto C col punto D, e l'obliqua AC coll'obliqua AD; onde sarà AC=AD; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Due oblique che partono dallo stesso punto ed hanno i piedi egualmente distanti dal piede della perpendicolare, s'inclinano egualmente tanto alla retta sulla quale sono condotte, quanto alla perpendicolare.

41. Teor. *Se da un punto A* (fig. 9) *posto fuori di una retta CD si abbassano sulla medesima due oblique AE, AD i cui piedi sono disugualmente distanti dal piede della perpendicolare AB, sarà di tali oblique minore quella il cui piede è meno distante del piede della perpendicolare.*

Dal piede D, più prossimo alla perpendicolare, s'immagini innalzata sulla CD la perpendicolare DF, la quale taglierà l'obliqua AE in qualche punto F. Essendo la retta AD minore della spezzata AFD, ed essendo la perpendicolare FD minore dell'obliqua FE, sarà con più ragione AD minore di AF più FE, ovvero AD $<$ AE (*leggi AD minore di AE*); dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Due oblique eguali non possono esser poste dalla stessa parte della perpendicolare.

Coroll. Da un punto dato fuori di una retta non possono condursi sulla medesima tre oblique uguali fra loro.

Scolio. Se le due oblique date AC, AE non sono poste dalla stessa parte della perpendicolare, in vece di una di esse AC, si considererà la sua uguale AD.

42. Teor. *Se da un punto A* (fig. 9) *posto fuori di una retta CD si abbassano sulla medesima due oblique eguali AC, AD, saranno i piedi di tali oblique egualmente distanti dal piede della perpendicolare AB.*

Poichè se BC e BD sono disuguali, saranno pure disuguali le due oblique AC, AD; ma ciò è impossibile, perchè contro l'ipotesi, dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Le oblique eguali che partonoda uno stesso punto della perpendicolare, s'inclinano egualmente tanto alla retta sulla quale sono condotte, quanto alla perpendicolare.

2

43. Teor. *Se da un punto A* (fig. 9) *posto fuori di una retta CD si abbassano sulla medesima due oblique disuguali AC, AE, sarà il piede della minore AC meno distante dal piede della perpendicolare.*

Poichè se BC non è minore di BE, potrà essergli o uguale, o maggiore; quindi nel primo caso sarebbe AC=AE; e nel secondo caso sarebbe AC> AE (*leggi AC maggiore di AE*); ma entrambe queste conseguenze sono false, perchè contrarie all'ipotesi, dunque è vero l'en. teor.

44. Teor. *Due oblique AC, AD* (fig. 10) *che partono dallo stesso punto, fanno colla retta CD, sulla quale sono condotte, disuguali gli angoli che rivolgono la loro apertura dalla stessa parte.*

Possono darsi due casi: quando la perpendicolare AB cade fra le oblique; e quando cade fuori le medesime. Nel 1.° caso, i due angoli ACE, ADE sono disuguali, perchè il primo è acuto, ed il secondo è ottuso (39). Nel 2.° caso si tagli DE=CB; dal punto E s'immagini elevata sulla DB la perpendicolare EF, sulla quale presa EF=BA si conduca DF. Considerando la figura ACB sovrapposta all'altra FDE in modo che il punto B cada sul punto E, e che l'angolo retto CBA combaci coll'altro DEF, il punto A cadrà sul punto F, il punto C sul punto D, e la AC sulla FD; onde sarà angolo FDE=ACB; ma l'angolo FDE è sempre disuguale coll'angolo ADB, perchè FE, che è uguale ad AB, è sempre maggiore di NE (39), dunque pure l'angolo ACB è sempre disuguale coll'altro ADB; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Di due oblique disuguali condotte da uno stesso punto sù di una retta, la maggiore è più inclinata alla retta.

45. Teor. *Ogni punto della perpendicolare BA* (fig. 11) *innalzata sulla metà di una retta CD è ugualmente distante dagli estremi della retta; ed ogni punto posto fuori di tale perpendicolare è disugualmente distante dagli estremi della retta.*

Si congiunga un punto A della perpendicolare cogli estremi C, D. Considerando la figura ACD piegata secondo la AB in modo che la parte ABC si adatti sulla parte ABD, la BC

combacerà colla BD, il punto C col punto D, e la AC colla AD; onde sarà AC = AD.

Si congiunga un punto E, posto fuori la perpendicolare, cogli estremi C, D; ed il punto F, dove la congiungente ED taglia la perpendicolare, col punto C. La retta EC è minore della linea spezzata EFC; ma FC è uguale ad FD, dunque EC è minore di ED; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Se due punti sono egualmente distanti dagli estremi di una retta data, la retta che li congiunge è perpendicolare alla data, e la divide in due parti eguali.

Scolio. Se si congiungono gli estremi di una retta data con un punto posto fuori la perpendicolare che la divide in due parti uguali, di tali congiungenti sarà minore quella che sta tutta da una parte della perpendicolare.

Scolio. La perpendicolare innalzata sulla metà di una retta è il luogo dei punti che sono ugualmente distanti dagli estremi della retta.

16. Teor. *Ogni punto della bisettrice AD* (fig. 12) *di un'angolo BAC è ugualmente distante dai lati dell'angolo; ed ogni punto posto fuori di tale bisettrice è disugualmente distante dai lati dell'angolo.*

Da un punto D della bisettrice AD si suppongano abbassate sui lati AB, AC, le perpendicolari DB, DC.

Considerando la figura BACD piegata secondo la AD in modo che la parte BAD si adatti sulla CAD, la AB combacerà colla AC, e la DB colla DC, (37) onde sarà DB = DC.

Da un punto E posto fuori la bisettrice si suppongano abbassate sui lati AB, AF le perpendicolari EB, EF; dal punto D dove la prima incontra la bisettrice si consideri abbassata DC perpendicolare ad AF, e si conduca EC.

La perpendicolare EF è minore dell'obliqua EC, ma questa è minore della linea spezzata EDC, che è uguale ad EB, dunque EF è minore di EB.

Scolio. Se due punti sono egualmente distanti dai lati di un'angolo dato, la retta che li congiunge è la bisettrice dell'angolo dato.

Scolio. La bisettrice d'un angolo è il luogo dei punti egualmente distanti dai lati dell'angolo.

RETTE PARALLELE

Definizioni

47. Due rette, poste sullo stesso piano, si dicono **parallele** quando serbano fra loro dapertutto la stessa distanza; o ciò che vale lo stesso, quando prolungate indefinitamente non s'incontrano mai.

48. Quando due rette AC , DF (fig. 13) vengono intersecate da una terza GL, si formano otto angoli, i quali paragonati due a due prendono i nomi seguenti:

Gli angoli ABE , DEL si dicono **interno esterno dalla stessa parte**, oppure **corrispondenti**.

Gli angoli ABE , BEF si dicono **alterni interni**.

Gli angoli ABG , FEL si dicono **alterni esterni**.

Gli angoli ABE , DEB si dicono **interni dalla stessa parte**.

Gli angoli ABG , DEL si dicono **esterni dalla stessa parte**.

49. Teor. *Per un punto A* (fig. 14) *dato fuori di una retta BC, non si può condurre alla medesima che una sola parallela AD.*

Perocchè se se ne potesse condurre un'altra AE , supponendo abbassate, tanto dal punto A, quanto da un'altro punto E della AE, le perpendicolari AB , EC sulla BC, sarebbe ciascuna delle rette EC,DC uguale alla terza AB (47); e per conseguenza sarebbe EC=DC ; ma ciò è impossibile; dunque è pure impossibile che AE sia parallela a BC; onde è vero l'enunciato teorema.

Coroll. Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.

Scolio. Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una parallela a questa retta: ed il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele fra loro è la parallela equidistante dalle medesime.

50. Teor. *Due rette AB , DE* (fig. 13) *che vengono inter-*

secate da una terza BE sono parallele quando due angoli corrispondenti ABE, DEL sono uguali fra loro.

Infatti supponendo che le rette AB, DE s'incontrino in qualche punto, si avranno due oblique AB, DE che partono dallo stesso punto, e formano colla BE uguali gli angoli ABE, DEL che rivolgono la loro apertura dalla stessa parte; ma ciò è impossibile (44); dunque è pure impossibile che le rette AB,DE possano incontrarsi; onde è vero l'enunciato teorema.

Coroll. Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele fra loro.

51. Teor. *Due rette AB, DE* (fig. 13), *che vengono intersecate da una terza BE, sono parallele quando due angoli alterni interni ABE, BEF sono uguali fra loro.*

Essendo ciascuno dei due angoli ABE, DEL uguale al terzo BEF, segue che il primo ABE è uguale al secondo DEL; ma questi due angoli ABE,DEL sono corrispondenti, dunque le rette AB, DE sono parallele; onde è vero l'enunciato teorema.

52. Teor. *Due rette AB, DE* (fig. 13), *che vengono intersecate da una terza BE, sono parallele quando due angoli interni dalla stessa parte ABE,DEB sono l'uno supplemento dell'altro.*

Essendo ciascuno dei due angoli ABE, DEL supplemento del terzo DEB, segue che il primo ABE è uguale al secondo DEL; ma questi due angoli ABE, DEL sono corrispondenti, dunque le rette AB, DE sono parallele; onde è vero l'enunciato teorema.

53. Teor. *Quando due rette parallele AB,DE* (fig. 13) *vengono intersecate da una terza BE, gli angoli corrispondenti ABE, DEL sono uguali fra loro.*

Poichè se l'angolo DEL non è uguale all'angolo ABE, sia MEL=ABE; sarà perciò la retta ME parallela ad AB (50); ma DE è pure parallela ad AB, dunque per uno stesso punto E possono condursi due parallele ad AB, ciò che è impos-

sibile; quindi è pure impossibile che i due angoli ABE,DEL siano disuguali; onde è vero l'en. teor.

Coroll. Se la retta BE è perpendicolare ad una delle parallele BA, sarà pure perpendicolare all'altra ED.

54. Teor. *Quando due rette parallele AB,DE* (fig. 13) *vengono intersecate da una terza BE, gli angoli alterni interni ABE, BEF sono uguali fra loro.*

Essendo ciascuno degli angoli ABE , BEF uguale al terzo DEL, segue che il primo ABE è uguale al secondo BEF; onde è vero l'enunciato teorema.

55. Teor. *Quando due rette parallele AC, DF* (fig. 13) *vengono intersecate da una terza BE, gli angoli interni dalla stessa parte ABE,DEB sono l'uno supplemento dell'altro.*

Infatti essendo l'angolo DEL supplemento dell'altro DEB, pure l'angolo ABE, che è uguale a DEL, sarà supplemento dell'angolo DEB; onde è vero l'en. teor.

56. Teor. *Due rette AB , CD* (fig. 15) *che vengono intersecate da una terza BD, s'incontrano quando gli angoli interni dalla stessa parte ABD , CDB non sono l'uno supplemento dell'altro.*

Infatti se le due rette AB , CD non s'incontrano, sono parallele, e perciò l'angolo ABD è supplemento dell'angolo CDB; ma ciò è impossibile, perchè contro l'ipotesi, dunque è pure impossibile che le due rette AB,CD siano parallele; onde è vero l'enunciato teorema.

57. Teor. *Due angoli che hanno i lati rispettivamente paralleli sono o uguali, o supplementari* (fig. 16).

1.° caso. Siano i due angoli ABC , DEF che hanno i lati paralleli e diretti due a due nello stesso senso. Si prolunghi la DE sino in G. L'angolo DEF è uguale all'angolo DGC, perchè corrispondenti; per la stessa ragione l'angolo ABC è uguale all'angolo DGC, dunque l'angolo DEF è uguale ad ABC.

2.° caso. Siano i due angoli LBM , DEF che hanno i lati paralleli e diretti due a due in senso opposto. Si prolunghi-

no i lati LB,MB verso C ed A. Essendo l'angolo DEF=ABC, ed essendo pure l'angolo LBM=ABC, sarà l'angolo DEF=LBM.

3.° caso. Siano i due angoli ABL, DEF che hanno due lati rivolti nello stesso senso e due in senso opposto. Si prolunghi la LB verso C. L'angolo DEF è uguale ad ABC, ma ABC è supplemento di ABL, dunque pure DEF è supplemento di ABL; onde è vero l'enunciato teorema.

58. Teor. *Due rette parallele AB, CD* (fig. 17) *comprese fra due altre rette parallele AC, BD, sono uguali fra loro.*

Dai punti A e C si suppongano abbassate sulla BF le perpendicolari AE, CF, che saranno uguali e parallele fra loro (47, 50). I due angoli BAE, AEB essendo rispettivamente uguali agli angoli DCF,CFD, considerando la figura AEB sovrapposta all'altra CFD in modo che la AE combaci colla CF, e che il punto A cada sul punto C, la AB cadrà sulla CD, la EB sulla FD, ed il punto B, intersezione delle rette AB ed EB, cadrà sul punto D, intersezione delle rette CD ed FD; onde le due rette AB, CD combaceranno, e saranno uguali; dunque è vero l'en. teor.

59. Teor. *Se due rette AB, CD* (fig. 18) *s'incontrano, le perpendicolari AD, CD, innalzate sulle medesime, devono pure incontrarsi.*

Si congiungano tra loro i piedi A, C delle due perpendicolari. Dall'essere ciascuno degli angoli interni dalla stessa parte DAC, DCA minore di un retto, segue che l'uno di essi non è supplemento dell'altro; e perciò le due perpendicolari AD, CD devono incontrarsi (56); onde è vero l'en. teor.

TRIANGOLI

Definizioni

60. Un triangolo quando à i tre lati uguali dicesi **equilatero**; quando ne à due soli uguali dicesi **isoscele**; quando li à tutti e tre disuguali dicesi **scaleno**.

61. Un triangolo quando à i tre angoli uguali dicesi **equiangolo**; quando à un angolo retto dicesi **rettango-**

lo; quando à un angolo ottuso dicesi **ottusangolo**; e quando à tutti i tre angoli acuti dicesi **acutangolo**.

Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto dicesi **ipotenusa**; ed i lati che comprendono l'angolo retto diconsi **cateti**.

62. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 19) *un lato qualunque AC, è minore della somma degli altri due AB , BC; ed è maggiore della loro differenza.*

Infatti essendo AC una linea retta, ed ABC una linea spezzata, sarà AC<AB più BC. Essendo AC più BC> AB, togliendo di comune BC, sarà AC>AB meno BC; onde è vero l'enunciato teorema.

63. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 19) *a lati uguali AB , BC si oppongono angoli uguali.*

Essendo le due oblique BA , BC uguali fra loro, saranno ugualmente inclinate alla retta AC (42); vale a dire sarà angolo A=angolo C; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Ogni triangolo equilatero è pure equiangolo.

Scolio. Per convenzione generale la **base** ed il **vertice** di un triangolo isoscele, sono il lato disuguale, ed il vertice dell'angolo ad esso opposto.

Scolio. Siccome le oblique eguali si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare, e s'inclinano egualmente alla medesima (42), così in ogni triangolo isoscele ABC la perpendicolare BD abbassata dal vertice B sulla base AC, divide questa base e l'angolo al vertice in due parti uguali.

64. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 20) *a lati disuguali AB , BC si oppongono angoli disuguali*; *e propriamente al lato maggiore BC si oppone l'angolo maggiore A.*

Dal punto D, medio del terzo lato AC s'immagini innalzata la perpendicolare DE sul medesimo, e si congiunga il punto E, dove questa incontra il lato maggiore BC, col vertice A. L'angolo BAC è maggiore di EAC; ma l'angolo EAC è uguale all'altro ECA (45, 63), dunque l'angolo BAC è pure maggiore dell'angolo ECA; onde è vero l'en. teor.

65. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 19) *ad angoli uguali A e C, si oppongono lati uguali.*

Poichè se AB fosse maggiore, o minore di BC, pure l'angolo C sarebbe maggiore, o minore dell'angolo A; ma ciò è impossibile, perchè contro l'ipotesi; dunque AB è uguale BC; onde è vero l'en. teor.

Coroll. Ogni triangolo equiangolo è pure equilatero.

66. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 20) *ad angoli disuguali A e C si oppongono lati disuguali; e propriamente all'angolo maggiore A si oppone il lato maggiore BC.*

Poichè se BC fosse uguale o minore di BA, pure l'angolo A sarebbe uguale (63), o minore (64) dell'angolo C; ma entrambe queste conseguenze sono false, perchè contrarie all'ipotesi, dunque è vero l'en. teor.

67. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 21) *la somma degli angoli è uguale a due angoli retti.*

Da un vertice B s'immagini condotta la parallela DE al lato opposto AC. I due angoli DBA, BAC sono uguali, perchè alterni interni; i due angoli EBC, BCA sono pure uguali per la stessa ragione; dunque la somma dei due DBA, EBC è uguale alla somma degli altri due A e C; onde aggiungendo di comune l'angolo ABC, sarà la somma dei tre angoli DBA, ABC, CBE uguale alla somma dei tre angoli del triangolo ABC; ma la prima di queste somme è uguale a due retti, dunque pure la seconda è uguale a due retti; onde è vero l'en. teor.

Coroll. La somma di due angoli di ogni triangolo è sempre minore di due retti.

Coroll. In ogni triangolo un'angolo è supplemento della somma degli altri due.

Coroll. Ogni triangolo deve avere almeno due angoli acuti.

Coroll. I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono l'uno complemento dell'altro.

68. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 21) *l'angolo esterno FBC, che si à prolungando un lato AB, è uguale alla somma dei due interni ed opposti A e C.*

Essendo la somma dei due angoli FBC , CBA uguale alla somma dei tre angoli del triangolo, perchè ciascuna uguale a due retti, togliendo di comune l'angolo CBA, rimane l'angolo esterno FBC, uguale alla somma dei due A e C; onde è vero l'en. teor.

Coroll. In ogni triangolo un'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli interni ed opposti.

69. Teor. *Due triangoli ABC , DEF* (fig. 22) *sono uguali quando hanno un lato AC uguale ad un lato DF, e gli angoli A e C, adiacenti al primo, rispettivamente uguali agli angoli D ed F, adiacenti al secondo.*

S'immagini il triangolo ABC sovrapposto all' altro DEF in modo che il lato AC combaci col suo uguale DF. Or poichè l'angolo A è uguale all'angolo D, e l'angolo C all'angolo F, il lato AB cadrà sul lato DE, il lato CB sul lato FE, ed il punto B, intersezione di AB e CB, cadrà sul punto E, intersezione di DE ed FE: onde il triangolo ABC combacerà col triangolo DEF e gli sarà uguale; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Dall' eguaglianza dei triangoli ABC , DEF, segue che il terzo angolo B è uguale al terzo angolo E; e che i lati BA e BC, che comprendono il primo, sono rispettivamente uguali ai lati ED ed EF, che comprendono il secondo.

Scolio. Se i due angoli uguali in vece di essere tutti e due adiacenti fossero l'uno adiacente e l'altro opposto al lato uguale, il teorema ridurrebbesi al dimostrato; a cagione che il terzo angolo del primo triangolo, sarebbe uguale al terzo angolo del secondo triangolo.

Scolio. Un triangolo è completamente determinato conoscendo un lato e due angoli.

Scolio. Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno uguali l'ipotenusa ed un'angolo acuto; oppure un cateto ed un'angolo acuto.

70. Teor. *Due triangoli ABC , DEF* (fig. 22) *sono uguali quando hanno due lati BA e BC rispettivamente uguali a due lati ED ed EF, e l'angolo B compreso tra i primi, uguale all'angolo E compreso tra i secondi.*

S'immagini il triangolo ABC sovrapposto all'altro DEF in

modo che il vertice B cada sul vertice E, e che i lati BA,BC combacino rispettivamente coi lati uguali ED,EF; in tal caso il punto A cadrà sul punto D, il punto C sul punto F, ed il terzo lato AC sul terzo lato DF; onde il triangolo ABC combacerà coll'altro DEF, e gli sarà uguale; dunque è vero l'enunciato teorema.

Coroll. Dall'uguaglianza dei due triangoli si à che il terzo lato AC è uguale al terzo lato DF, e che gli angoli A e C, adiacenti al primo, sono rispettivamente uguali agli angoli D ed F, adiacenti al secondo.

Scolio. Un triangolo è completamente determinato conoscendo un angolo ed i lati che lo comprendono.

71. Teor. *Due triangoli ABC, DBC* (fig. 23) *sono uguali quando hanno i tre lati AB, BC, AC rispettivamente uguali ai tre lati DB, BC, DC.*

Si pongano i due triangoli uno accanto all'altro in modo che i lati uguali BC combacino, e che gli angoli ABC,DBC, compresi fra lati uguali, siano adiacenti; si congiungano i vertici A e D. Essendo per ipotesi BA=BD, ed AC=DC, sarà la BC perpendicolare alla AD e la dividerà in due parti uguali nel punto E (45), cosicchè sarà AE=DE. Ora considerando la figura ABDC piegata secondo la BC, in modo che il triangolo ABC si sovrapponga all'altro DBC, la retta EA cadrà sulla ED, ed il punto A sul punto D; onde la AB combacerà colla DB, la AC colla DC, e per conseguenza il triangolo ABC combacerà coll'altro DBC, e gli sarà uguale; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Dall'uguaglianza dei triangoli ABC, DBC segue che i tre angoli A, B, C del primo, sono rispettivamente uguali ai tre angoli D, B, C del secondo.

Scolio. Un triangolo è completamente determinato conoscendo i suoi tre lati.

72. Teor. *Due triangoli rettangoli ABC, DBC* (fig. 24) *sono uguali quando hanno l'ipotenusa BA uguale all'ipotenusa BD, ed un cateto BC uguale ad un cateto BC.*

Si pongano i due triangoli l'uno accanto all'altro in modo che i cateti uguali BC combacino, e che gli angoli retti

BCA , BCD siano consecutivi. Essendo la somma dei due angoli adiacenti BCA , BCD uguale a due retti, i lati esterni CA , CD saranno per dritto; ed essendo le oblique BA , BD uguali, per ipotesi, sarà CA=CD; dunque i due triangoli proposti hanno i tre lati uguali, e perciò sono uguali; onde è vero l'en. teor.

Coroll. Dall'eguaglianza dei triangoli ABC , DBC segue che il secondo cateto AC è uguale al secondo cateto DC, e che i due angoli acuti A e B sono rispettivamente uguali ai due angoll acuti D e B.

Scolio. Un triangolo rettangolo è completamente determinato conoscendo l'ipotenusa ed un cateto.

Scolio. Dai quattro teoremi precedenti si rileva che in due triangoli uguali sono uguali fra loro quei lati che sono opposti agli angoli uguali; e viceversa sono uguali fra loro quegli angoli che sono opposti ai lati uguali.

73. Teor. *Se due triangoli ABC , DBC* (fig. 25) *hanno due lati AB , BC rispettivamente uguali a due lati DB , BC , e l'angolo ABC compreso dai primi , maggiore dell'angolo DBC compreso dai secondi, sarà il terzo lato AC del primo triangolo maggiore del terzo lato DC del secondo triangolo.*

Si pongano i due triangoli l'uno accanto all'altro in modo che i lati uguali BC combacino, e che gli angoli ABC,DBC, compresi tra lati uguali, siano consecutivi: si congiungano i vertici A e D, e s'immagini diviso l'angolo ABD in due parti uguali colla retta BE. Essendo per ipotesi AB=BD il triangolo ABD è isoscele, e per conseguenza la retta BE, che divide l'angolo al vertice ABD in due parti uguali, è perpendicolare alla base AD, e passa pel suo punto medio E (63). Posto ciò, la BC dividendo in due parti disuguali l'angolo ABD è diversa della BE che lo divide in due parti uguali; quindi il punto C, stando fuori la perpendicolare BE, che passa pel punto medio di AD, è disugualmente distante dagli estremi A , D; ma delle due congiungenti AC , CD, la CD è posta tutta da una parte della perpendicolare BE, dunque AC è maggiore di CD (45); onde è vero l'en. teor.

Scolio. La proposizione reciproca della dimostrata è parimente vera. In fatti essendo per ipotesi i lati AB , BC ri-

spettivamente uguali ai lati DB, BC, ed il terzo lato AC maggiore del terzo lato DC, l'angolo ABC non può essere nè eguale, nè minore dell'angolo DBC; perocchè sarebbe, contro l'ipotesi, nel primo caso il terzo lato AC uguale al terzo lato CD (70), e nel secondo caso il terzo lato AC minore del terzo lato DC.

QUADRILATERI

Definizioni

74. Un quadrilatero che à i lati opposti paralleli si dice **parallelogrammo**, o **romboide**.

75. Un parallelogrammo che à gli angoli retti si dice **rettangolo**.

76. Un parallelogrammo che à i lati uguali si dice **losanga**, o **rombo**.

77. Un parallelogrammo che à gli angoli retti ed i lati uguali si dice **quadrato**.

Il quadrato è l'**unità di misura** delle superficie.

78. Un quadrilatero che à due soli lati paralleli si dice **trapezio**.

79. La retta che unisce due vertici non successivi di un poligono si dice **diagonale**.

80. Un poligono si dice **convesso** quando resta tutto dalla stessa parte di qualunque suo lato prolungato.

81. Teor. *In ogni parallelogrammo ABCD* (fig. 26) *i lati opposti sono uguali, come pure gli angoli opposti.*

In fatti i lati AB e DC, oppure AD e BC, sono uguali, perchè parallele comprese fra parallele; e gli angoli A e C, oppure B e D, sono pure uguali, perchè hanno i lati paralleli e diretti in senso contrario; dunque è vero l'en. teor.

Scolio. Ogni parallelogrammo resta diviso in due triangoli uguali da una sua diagonale.

82. Teor. *Un quadrilatero ABCD* (fig. 26) *che à i lati opposti uguali, li avrà pure paralleli, e sarà un parallelogrammo.*

Si conduca la diagonale BD. I due triangoli ABD , BDC sono uguali, perchè hanno i tre lati uguali; quindi saranno pure uguali gli angoli opposti a lati uguali , cioè sarà ABD=BDC, ed ADB=DBC; ma gli angoli ABD e BDC sono alterni interni rispetto alle rette AB e DC; e gli altri due ADB e DBC sono alterni interni rispetto alle rette AD e BC; dunque AB è parallela a DC, ed AD è parallela a BC (51); onde il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti paralleli è un parallelogrammo; dunque è vero l'enun. teor.

83. Teor. *Un quadrilatero ABCD* (fig. 26) *che à due lati opposti AB , DC uguali e paralleli, avrà pure gli altri due uguali e paralleli, e sarà un parallelogrammo.*

Si conduca la diagonale BD. I due triangoli ABD, BDC sono uguali, perchè hanno il lato BD comune, il lato AB=DC, e l'angolo ABD, compreso tra i primi, eguale all'angolo BDC, compreso dai secondi; quindi sarà il terzo lato AD uguale al terzo lato BC, e per conseguenza il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti uguali è un parallelogrammo; onde è vero l'enun. teor.

84. Teor. *In ogni parallelogrammo ABCD* (fig. 27) *le diagonali AC,BD si tagliano scambievolmente in parti uguali.*

I due triangoli ABO , DCO sono uguali , perchè hanno il lato AB uguale al lato DC, e gli angoli adiacenti al primo, uguali agli angoli adiacenti al secondo; quindi saranno gli altri due lati del primo, uguali agli altri due lati del secondo; cioè sarà OA=OC ed OB=OD; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Nel caso particolare che il parallelogrammo è un rettangolo o un quadrato, le diagonali sono uguali fra loro, perchè uguali risultano li due triangoli ABD , ACD; e nel caso poi che il parallelogrammo è una losanga, o un quadrato, le diagonali risultano perpendicolari tra loro, perchè gli estremi A e C dell'una, sono egualmente distanti dagli estremi B e D dell'altra.

85. Teor. *Un quadrilatero ABCD* (fig. 27) *le cui diagonali AC , BD si tagliano scambievolmente in parti uguali, è un parallelogrammo.*

I due triangoli AOD e BOC essendo uguali, perchè hanno gli angoli in O uguali compresi fra lati uguali, sarà AD=BC; per una simile ragione dai due triangoli AOB e DOC, si à AB=DC; dunque il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti uguali è un parallelogrammo; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Se oltre a tagliarsi scambievolmente in parti uguali le due diagonali sono uguali fra loro, il quadrilatero dato è un rettangolo; se sono perpendicolari, è una losanga; e se sono uguali e perpendicolari, è un quadrato.

86. Teor. *In ogni trapezio ABCD* (fig. 28) *la retta EF che unisce i punti medi dei lati non paralleli è parallela agli altri due lati, ed è uguale alla metà della loro somma.*

Pel punto E, medio di AB, s'immagini condotta MN parallela a CD; e si prolunghi CB sino ad incontrare la MN. I due triangoli AEM e BEN sono uguali, perchè hanno il lato AE uguale al lato BE, e gli angoli MAE ed MEA, adiacenti al primo, rispettivamente uguali agli angoli EBN e BEN, adiacenti al secondo; quindi sarà AM=BN ed EM=EN. Nel parallelogrammo MNCD essendo i lati MN e DC uguali, pure le loro metà EN ed FC saranno uguali; ma EN ed FC sono parallele, dunque ENCF è un parallelogrammo (83), e perciò EF è uguale e parallele ad NC, e quindi ad MD.

Essendo AM=BN, sarà MD più NC, ovvero due volte EF, uguale ad AD più BC; e per conseguenza EF uguale alla metà di AD più BC; dunque è vero l'en. teor.

87. Teor. *Il numero di angoli retti corrispondente alla somma degli angoli interni di un poligono convesso ABCDE* (fig. 29) *si à diminuendo di quattro il doppio del numero dei suoi lati.*

Infatti congiungendo un punto qualunque O preso nell'interno del poligono con tutti i vertici, si vengono a formare tanti triangoli per quanti sono i lati del poligono; ma la somma degli angoli di questi triangoli, cioè due retti ripetuti tante volte per quanti sono i lati del poligono, o ciò che vale lo stesso un retto ripetuto tante volte per quanto è il doppio del numero dei lati del poligono; diminuita della somma degli angoli che sono intorno al punto O, cioè

quattro retti, dà la somma degli angoli del poligono; dunque è vero l'en. teor.

Scolio. Indicando con n il numero dei lati di un poligono convesso, sarà $2n-4$ il numero degli angoli retti che corrisponde alla somma dei suoi angoli interni.

Scolio. Siccome addizionando ciascun'angolo interno di un poligono convesso con l'angolo adiacente esterno, che si à prolungando nello stesso verso tutti i lati, si hanno $2n$ retti per somma; e siccome questa somma è maggiore di quella dei soli angoli interni, che è $2n-4$, per quattro retti; così può dirsi che in ogni poligono convesso ABCDE la somma degli angoli esterni FAB, GBC, LCD, MDE, NEA, che si hanno prolungando nello stesso verso tutti i lati, è costantemente uguale a quattro angoli retti.

CERCHIO E CIRCONFERENZA

Definizioni

88. La **circonferenza** è una linea curva che à tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno che dicesi **centro**.

89. Il **cerchio** è una superficie piana limitata da una circonferenza.

90. La distanza di un punto qualunque della circonferenza dal centro dicesi **raggio**.

Tutti i raggi sono uguali fra loro.

91. La retta che passa pel centro e termina d'ambe le parti alla circonferenza, dicesi **diametro**.

Tutti i diametri sono uguali fra loro e doppi dei raggi.

I cerchi che hanno raggi, o diametri uguali sono uguali.

92. Una parte qualunque della circonferenza dicesi **arco**.

93. La retta che unisce le due estremità di un arco si dice **corda** o **sottesa**.

94. La porzione di cerchio compresa fra l'arco e la sua corda si dice **segmento**.

95. La porzione di cerchio compresa fra l'arco ed i raggi che passano pei suoi estremi dicesi **settore**.

96. Una retta che à due punti di comune colla circonferenza si dice **secante**.

97. Una retta che à un sol punto di comune colla circonferenza si dice **tangente** alla medesima, ed il punto comune dicesi **punto di contatto**.

98. Due circonferenze che hanno un sol punto di comune si dicono l'una tangente dell'altra.

99. Un angolo che à il vertice al centro dicesi **angolo al centro**.

100. Un angolo che à il vertice alla circonferenza, ed i lati del quale sono corde, dicesi **angolo alla circonferenza** o **iscritto**.

101. Un'angolo si dice iscritto in un segmento quando il vertice è sull'arco del segmento, ed i lati passano per gli estremi della corda del segmento.

102. Un poligono che à tutti i vertici su di una circonferenza, si dice **iscritto** nella circonferenza, e la circonferenza si dice **circoscritta** al poligono.

103. Un poligono che à tutti i lati tangenti ad una circonferenza si dice **circoscritto** alla circonferenza, e la circonferenza si dice **iscritta** nel poligono.

104. Teor. *Una retta non può intersecare una circonferenza in più di due punti.*

Poichè se potesse intersecarla in tre, congiunti li medesimi col centro si avrebbero tre oblique rispetto alla secante, e tre raggi rispetto al cerchio; ma i raggi sono tutti uguali fra loro, dunque da uno stesso punto potrebbero su di una retta condursi tre oblique uguali, ciò ch'è impossibile; dunque è pure impossibile che una retta possa intersecare una circonferenza in più di due punti; onde è vero l'enunciato teorema.

105. Teor. *Ogni diametro AD* (fig. 30) *divide la circonferenza ed il cerchio in due parti uguali.*

Infatti considerando la figura ABDE piegata secondo il diametro AD, in modo che la parte AED si sovrapponga all'altra ABD, l'arco AED dovrà combaciare coll'arco ABD; poichè se ciò non avvenisse, vi sarebbero dei punti della circonferenza disugualmente lontani dal centro; ciò che è assurdo; quindi i due archi AED, ABD combaciando, com-

baceranno pure li due segmenti AED, ABD; onde è vero l'enunciato teorema.

106. Teor. *La retta AD* (fig. 31) *perpendicolare all'estremo di un raggio CA è tangente al cerchio.*

Poichè qualunque altra retta CD condotta dal centro C sulla AD, essendo come obliqua maggiore della perpendicolare CA, ovvero del raggio, avrà il suo estremo D fuori la circonferenza; dunque la retta AD avendo il solo punto A di comune colla circonferenza è tangente alla medesima; onde è vero l'en. teor.

107. Teor. *Il raggio CA* (fig. 31) *che pàssa pel punto di contatto A è perpendicolare alla tangente AD.*

Infatti essendo la retta AD una tangente, tutti i suoi punti, tranne il punto di contatto A, sono fuori la circonferenza; onde il raggio CA è minore di ogni altra retta CD che dal centro C si conduce sulla AD; ma di tutte le rette che da un punto possono condursi su di una retta data la più corta è la perpendicolare, dunque CA è perpendicolare ad AD; onde è vero l'en. teor.

Scolio. La perpendicolare condotta pel centro sulla tangente passa pel punto di contatto; perocchè se ciò non avvenisse potrebbero per un punto condursi due perpendicolari sulla stessa retta.

108. Teor. *Ogni retta AB* (fig. 32) *che passa pel centro ed è perpendicolare ad una corda DE divide la corda e l'arco sotteso in due parti uguali.*

Si consideri la figura ADBE piegata secondo il diametro AB in modo che il semicerchio ADB combaci coll'altro AEB; è chiaro che la retta FD si adatterà sul suo prolungamento FE, ed il punto D sul punto E (105); per conseguenza sarà DF=EF, e sarà arco BD= arco BE; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Il centro di un cerchio, il punto medio di una corda, ed i punti medi degli archi sottesi dalla medesima, sono posti sullo stesso diametro perpendicolare alla detta corda; onde la retta che soddisfa a due delle cinque condizioni cennate soddisferà pure alle altre.

Scolio. Il luogo dei punti medi di un sistema di corde parallele è il diametro perpendicolare a queste corde.

109. Teor. *Due rette parallele intercettano sulla circonferenza archi uguali* (fig. 33).

Siano le tangenti AB , HL, e le secanti DE , FG tutte parallele tra loro.

Pel centro C s'immagini condotta ad una delle rette date la perpendicolare MN, la quale sarà pure perpendicolare a ciascuna delle altre rette date, e passerà pei punti di contatto M ed N (107). Gli archi MD,MF essendo rispettivamente uguali agli archi ME,MG, sarà l'arco DF, differenza dei primi, uguale all'arco EG, differenza dei secondi; ma gli archi uguali DF , EG sono compresi fra le due parallele DE , FG, tutte e due secanti; gli archi uguali MD , ME sono compresi fra le parallele AB , DE, l'una tangente e l'altra secante; e gli archi uguali MDN,MEN sono compresi fra le parallele AB , HL, tutte due tangenti; dunque è vero l'en. teor.

110. Teor. *Ogni angolo iscritto è metà dell'angolo al centro che intercetta fra i suoi lati lo stesso arco* (fig. 34).

Possono darsi tre casi: 1.° che il centro stia su di un lato dell'angolo; 2.° che stia dentro dell'angolo; 3.° che stia fuori dell'angolo.

1.°) Sia ABD l'angolo dato. Si conduca il raggio AC. Nel triangolo isoscele ACB i due angoli ABC,BAC sono uguali; ma la loro somma è uguale all'angolo esterno ACD (68), dunque uno di essi ABD è metà di ACD.

2.°) Sia ABE l'angolo dato. Si conduca il diametro BD ed i raggi AC,CE. Essendo ciascuno degli angoli ABD,DBE metà di ciascuno degli angoli ACD,DCE, sarà l'angolo ABE, somma dei primi, metà dell'angolo ACE somma dei secondi.

3.°) Sia FBE l'angolo dato. Si conduca il diametro BD , ed i raggi CF,CE. Essendo ciascuno degli angoli FBD,EBD metà di ciascuno degli angoli FCD,ECD, sarà l'angolo FBE, differenza dei primi, metà dell'angolo FCE differenza dei secondi; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. Gli angoli iscritti nello stesso, o in uguali segmenti sono uguali fra loro.

111. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, se due angoli al centro ACB, DCE* (fig. 35) *sono uguali, gli archi intercetti saranno pure uguali; e reciprocamente.*

Essendo per ipotesi angolo ACB=angolo DCE, se il settore ACB si sovrappone all'altro DCE, in modo che il raggio CA combaci col raggio CD, il raggio CB combacerà coll'altro CE, e l'arco AB combacerà coll'arco DE; onde sarà arco AB = arco DE.

Reciprocamente: essendo arco AB = arco DE, sovrapponendo il settore ACB all'altro DCE, in modo che il raggio CA combaci col raggio CD, e l'arco AB cada sull'arco DE, il punto B cadrà sul punto E, il raggio CB sul raggio CE, e l'angolo ACB combacerà coll'angolo DCE; onde è vero l'enunciato teorema.

112. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due angoli al centro DCE, ACF* (fig. 35) *il minore DCE intercetta l'arco minore; e reciprocamente.*

Dall'angolo maggiore ACF si tagli la parte ACB=DCE; sarà arco AB = arco DE; ma arco AB è minore di arco ABF, dunque pure arco DE è minore di arco ABF.

Reciprocamente: essendo arco DE < arco ABF, se dall'arco ABF si taglia AB=DE, e si congiunge il punto B col centro C, sarà angolo ACB=angolo DCE; ma angolo ACB è minore di angolo ACF, dunque pure angolo DCE è minore di angolo ACF; onde è vero l'en. teor.

113. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, due angoli al centro ACB, ACF* (fig. 36) *stanno fra loro come gli archi intercetti.*

1.°) Siano i due archi AB, AF commensurabili, e propriamente sia

arco AB : arco AF : : 5 : 2.

Si divida l'arco AB in cinque parti uguali, e si congiungano i punti di divisione col centro C. È chiaro, per effetto dell'ipotesi, che l'arco AF conterrà esattamente due delle dette parti uguali, e quindi l'angolo ACF conterrà pure due degli angoli che compongono l'angolo ACB; onde si avrà la proporzione ang. ACB : ang. ACF : : 5 : 2;

che paragonata alla precedente, colla quale à un rapporto comune, dà per conseguenza la proporzione enunciata

ang. ACB : ang. ACF : : arco AB : arco AF.

2.º) Siano i due archi AB, AF incommensurabili; si avrà, ciò non pertanto, la stessa conseguenza precedente: poichè se ciò è falso il quarto termine della proporzione enunciata sia arco AM in vece di arco AF; cioè sia

ang. ACB : ang. ACF : : arco AB : arco AM.

Si divida l'arco AB in parti uguali, ciascuna minore di FM, e si congiunga uno dei punti di divisione N, che cadrà necessariamente tra i punti F ed M, col centro C. I due archi AB, AN essendo commensurabili si à la proporzione

ang. ACB : ang. ACN : : arco AB : arco AN;

che paragonata alla precedente, colla quale à gli antecedenti uguali, dà la proporzione

ang. ACF : ang. ACN : : arco AM : arco AN;

la quale è falsa; perchè mentre l'angolo ACF è minore dell'angolo ACN, l'arco AM è al contrario maggiore dell'arco AN; dunque il quarto termine della proporzione enunciata non può essere diverso di arco AF, e perciò è vero l'enunciato teorema.

114. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, corde uguali AB, DE* (fig. 35) *sottendono archi uguali; e reciprocamente.*

Si conducano i raggi CA, CB, CD, CE. Essendo per ipotesi corda AB=corda DE i due triangoli ACB, DCE sono uguali, perchè hanno i tre lati uguali; e perciò sarà angolo ACB=angolo DCE, e quindi arco AB=arco DE.

Reciprocamente: essendo arco AB=arco DE, sarà angolo ACB=angolo DCE; onde i due triangoli ACB, DCE, avendo un'angolo uguale compreso fra lati uguali, sono uguali; e perciò sarà AB=DE; ma AB e DE sono le corde degli archi dati, dunque è vero l'en. teor.

Scolio. Siccome ogni corda, che non passa pel centro, sottende due archi disuguali, quando senza indicazione particolare si dice l'arco sotteso da una corda, s'intende, per convenzione generale, parlar sèmpre dell'arco sotteso minore.

115. TEOR. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due corde disuguali AF, DE,* (fig. 35) *la maggiore AF sottende l'arco maggiore; e reciprocamente.*

Si conducano i raggi CA , CF , CD , CE. Nei triangoli ACF, DCE essendo i due lati AC , CF uguali ai due lati DC , CE, ed il terzo AF maggiore del terzo DE, sarà angolo ACF > angolo DCE (73), e per conseguenza arco ABF > arco DE.

Reciprocamente: essendo arco ABF > arco DE, sarà angolo ACF > angolo DCE ; quindi nei triangoli ACF , DCE essendo due lati AC , CF uguali a due lati DC, CE, e l'angolo ACF, compreso tra i primi, maggiore dell'angolo DCE, compreso dai secondi, sarà il terzo lato AF del primo, maggiore del terzo lato DE del secondo; ma AF e DE sono le corde degli archi dati, dunque è vero l'en. teor.

SCOLIO. Questa seconda parte del teorema è vera solo quando ciascuno degli archi che si considera è minore della semicirconferenza.

116. TEOR. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, due corde uguali AB , DE* (fig. 37) *distano ugualmente dal centro ; e reciprocamente.*

Dai centri C si abbassino le perpendicolari CF , CH sulle corde AB , DE. Essendo corda AB = corda DE sarà arco ALB = arco DME; onde facendo combaciare il cerchio ALB col cerchio DME in modo che il raggio CL combaci col raggio CM, il segmento ALB combacerà col segmento DME, ed il punto F col punto H; onde sarà CF = CH.

Reciprocamente, quando il cerchio ALB si fa combaciare coll'altro DME in modo che il raggio CL combaci col raggio CM, a cagione di CF = CH, il punto F cadrà sul punto H, e la corda AB, che è perpendicolare a CL, combacerà colla corda DE, che è perpendicolare a CM; ma le grandezze che combaciano sono uguali, dunque è vero l'en. teor.

117. TEOR. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due corde disuguali AB , GT* (fig. 37) *la maggiore AB è più vicina al centro ; e reciprocamente.*

Dai centri C si abbassino le perpendicolari CF , CR sulle corde AB , GT. Essendo corda AB > corda GT , sarà arco

$ALB >$ arco GMT; onde facendo combaciare il cerchio ALB col cerchio DME, in modo che il centro cada sul centro, e che il raggio CL combaci col raggio CM, il segmento ALB prenderà la posizione DME, nella quale la corda DE taglierà il raggio CM, a cui è perpendicolare, in un punto H posto tra il centro C ed il punto R, cosicchè sarà $CH < CR$; ma $CH = CF$, dunque $CF < CR$.

Reciprocamente, essendo $CF < CR$, quando il cerchio ALB si fa combaciare col cerchio DME in modo che il raggio CL combaci col raggio CM, la corda AB dovrà, tagliando il raggio CM tra i punti C ed R, prendere la posizione DE parallela a GT; donde segue essere arco $DME >$ di arco GMT, e quindi corda $DE >$ corda GT; ma corda DE è uguale a corda AB, dunque corda AB è maggiore di corda GT; onde è vero l'en. teor.

Scolio. La massima corda che può condursi in un cerchio è il diametro.

118. Teor. *Per tre punti A, B, D* (fig. 38) *non posti in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza di cerchio.*

Si congiungano fra loro i punti A e B, B e D; dai punti E ed F, medi delle rette AB, BD, si suppongano innalzate sulle medesime le perpendicolari EC, FC; e si congiunga il loro punto d'incontro C (59) coi punti dati A, B, D.

Essendo il punto C comune tanto alla perpendicolare EC, quanto all'altra FC, sarà l'obliqua CB uguale a ciascuna delle due CA, CD (45); onde se col centro C e con una delle oblique CA, CB, CD, come raggio, si descrive una circonferenza, la medesima passerà pei tre punti dati A, B, D.

Scolio. Poichè il centro della circonferenza che passa pei tre punti dati A, B, D dev'essere comune alle due perpendicolari EC, FC; e poichè due rette distinte non possono avere di comune che un punto solo; segue che per tre punti, non posti in linea retta, non si può far passare che una sola circonferenza.

Coroll. Due circonferenze distinte non possono avere di comune più di due punti; perchè se ne avessero almeno tre coinciderebbero.

119. Teor. *Se due circonferenze hanno un punto comune B, (fig. 39) posto fuori la retta AC dei centri, necessariamente ne avranno un altro, e perciò si taglieranno.*

Sulla retta AC dei centri si supponga abbassata dal punto comune B la perpendicolare BD, sulla quale si tagli MD uguale ad MB. Il punto A essendo posto sulla perpendicolare AC, che passa pel punto medio di BD, sarà egualmente distante dai punti B, D; onde la circonferenza che à per centro A e passa per B, passerà pure per D. Per una simile ragione la circonferenza che à per centro C e passa per B passerà pure per D; dunque il punto D è comune alle due circonferenze proposte, e perciò è vero l'en. teor.

Scolio. Quando due circonferenze si toccano, il punto di contatto deve necessariamente cadere sulla retta che congiunge i centri.

120. Teor. *Se due circonferenze si tagliano, la distanza dei centri è minore della somma dei raggi, ed è maggiore della loro differenza* (fig. 39).

Si congiungano i centri A e C con uno dei punti d'intersezione B. Dal triangolo ABC, che à per lati la distanza AC dei centri ed i raggi AB e BC, si à AC < AB più BC; ed AC > AB meno BC; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Se due circonferenze si toccano, il punto di contatto stando sulla retta dei centri, sarà la distanza dei medesimi uguale alla somma dei raggi quando le due circonferenze si toccano esternamente; e sarà la distanza dei centri uguale alla differenza dei raggi quando le due circonferenze si toccano internamente.

Scolio. Se due circonferenze non si tagliano nè si toccano potranno esser poste o l'una fuori dell'altra, o l'una dentro dell'altra: nel 1.° caso la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi; perchè, partendo dal contatto esterno, la prima cresce sempre allontanando i due centri, mentre la seconda si mantiene costante: nel 2.° caso la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi; perchè, partendo dal contatto interno, la prima diminuisce sempre avvicinando i due centri, mentre la seconda si mantiene costante.

121. Teor. *Se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi, ed è maggiore della loro differenza, le due circonferenze si tagliano.*

Poichè se le due circonferenze non si tagliano, stando l'una fuori dell' altra possono o toccarsi o non toccarsi; e stando l'una dentro dell'altra possono o toccarsi o non toccarsi; nel 1.° caso sarebbe la distanza dei centri uguale o maggiore della somma dei raggi; e nel 2.° caso sarebbe la distanza dei centri uguale o minore della differenza dei raggi; ma ciascuna di queste conseguenze è contraria all' ipotesi, dunque le due circonferenze devono necessariamente tagliarsi; onde è vero l'en. teor.

MISURA DEI TRIANGOLI E DEI QUADRILATERI

Definizioni

122. L'altezza di un triangolo è la perpendicolare abbassata da un suo vertice sul lato opposto, prolungato se occorre.

Il lato sul quale si abbassa la perpendicolare dicesi **base** del triangolo.

123. L'altezza di un parallelogrammo è la perpendicolare comune a due lati paralleli, uno dei quali dicesi **base**.

124. L'altezza di un trapezio è la perpendicolare comune ai due lati paralleli, che diconsi **basi**.

125. Due figure si dicono **equivalenti** quando avendo la stessa estensione superficiale non possono combaciare.

126. La superficie di una figura piana si dice propriamente **area** o **aia** quando si considera misurata o paragonata a quella di un'altra figura piana.

127. Teor. *Due rettangoli AC, EH* (fig. 40) *che hanno le basi AB ed EF uguali, e le altezze AD ed EL uguali, sono uguali.*

Infatti sovrapponendo il rettangolo AC all'altro EH, in modo che la base AB combaci colla base EF, i lati AD e BC combaceranno coi lati EL ed FH, e quindi il rettangolo AC col rettangolo EH; onde è vero l'en. teor.

128. Teor. *Due rettangoli AD, AE* (fig. 41) *che hanno la stessa altezza AF, stanno fra loro come le rispettive basi AC, AB.*

1.°) Siano le basi AC,AB commensurabili, e propriamente sia.

AC : AB : : 5 : 3

Si supponga divisa la AC in cinque parti uguali, e si avrà, per effetto dell'ipotesi, che di queste parti la AB ne conterrà esattamente tre. Da ciascun punto di divisione s'immagini innalzata sulla AC la perpendicolare. Essendo i cinque rettangoli parziali che compongono il rettangolo AD uguali fra loro, ed essendo tre di questi rettangoli contenuti nel rettangolo AE, si avrà la proporzione

rett. AD : rett. AE : : 5 : 3;

la quale, avendo colla precedente una ragione di comune, dà per conseguenza la proporzione enunciata

rett. AD : rett. AE : : AC : AB

2.°) Siano le basi AC, AB incommensurabili; si avrà, ciò non pertanto, la stessa conseguenza precedente,

rett. AD : rett. AE : : AC : AB.

Poichè se ciò è falso sia AL, invece di AB, il quarto termine della proporzione, cioè sia,

rett. AD : rett. AE : : AC : AL.

Si divida la AC in parti uguali, ciascuna minore di BL, e da uno dei punti di divisione M, che cade necessariamente tra i punti B ed L, s'immagini innalzata sulla AC la perpendicolare MN. I due rettangoli AD, AN, avendo le basi AC ed AM commensurabili, danno la proporzione

rett. AD : rett. AN : : AC : AM;

che paragonata alla precedente, colla quale à gli antecedenti uguali, dà la proporzione

rett. AE : rett. AN : : AL : AM;

la quale è falsa, perchè mentre è rett. AE $<$ rett. AN, al contrario è AL $>$ AM; onde è impossibile, che il quarto termine della proporzione enunciata sia diverso di AB, e perciò è vero l'en. teor.

Scolio. A cagione del perpendicolarismo dei lati adiacenti di un rettangolo, essendo indifferente prenderne uno per base e l'altro per altezza, o viceversa, può dirsi pure in

conseguenza del teorema or dimostrato che . . . *due rettangoli che hanno la stessa base stanno fra loro come le rispettive altezze.*

129. Teor. *Due rettangoli AC,BF* (fig. 42) *stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.*

Si pongano i due rettangoli l'uno accanto all' altro in modo che abbiano le basi AB e BE per dritto, e si prolunghi DC sino ad incontrare il lato EF. I due rettangoli AC, BL, avendo la stessa altezza BC, stanno fra loro come le rispettive basi, cioè

$$\text{rett.}\,AC : \text{rett.}\,BL :: AB : BE;$$

similmente i due rettangoli BL, BF, avendo la stessa base BE, stanno fra loro come le rispettive altezze, cioè

$$\text{rett.}\,BL : \text{rett.}\,BF :: BC : BM;$$

moltiplicando fra loro queste due proporzioni, ed omettendo il fattore (rett. BL) comune ai termini del primo rapporto che ne risulta, si à infine

$$\text{rett.}\,AC : \text{rett.}\,BF :: AB \times BC : BE \times BM;$$

onde è vero l'en. teor.

Scolio. In conseguenza del teorema or dimostrato indicando con a e b l'altezza e la base di un rettangolo R, ed indicando con Q il quadrato che à per lato l'unità lineare, si à la proporzione

$$R : Q :: a \times b : 1 \times 1;$$

dalla quale si ricava $\frac{R}{Q} = a \times b$; ma $\frac{R}{Q}$, essendo il rapporto della quantità R alla sua unità di misura Q, esprime la misura della quantità R, dunque pure $a \times b$, che è uguale a $\frac{R}{Q}$, esprimerà la misura della quantità R; onde può dirsi che . . . *l'aja di un rettangolo è uguàle al prodotto della base per l'altezza.*

Scolio. Il prodotto della base per l'altezza di un rettangolo, ovvero il prodotto delle unità lineari contenute nella base per quelle contenute nell'altezza, indica il numero delle unità superficiali che sono contenute nell'aja del rettangolo.

130. Teor. *Ogni parallelogrammo AC* (fig. 43) *è equivalente al rettangolo AE, che à la stessa base, e la stessa altezza.*

Le due figure date ABCD , ABEF avendo la stessa base AB e la stessa altezza AF, avranno i lati DC , FE sulla medesima retta DE. I due triangoli rettangoli BEC , AFD sono uguali perchè hanno rispettivamente uguali le ipotenuse BC,AD ed i cateti BE , AF; per conseguenza togliendo dalla intera figura ABED ora il triangolo BEC, ed ora l'altro AFD, si avranno due resti uguali in superficie; ma il primo di tali resti è il parallelogrammo ABCD, il secondo è il rettangolo ABEF; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. *L'aja di un parallelogrammo è uguale al prodotto della base per l'altezza.*

Coroll. I parallelogrammi stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Coroll. I parallelogrammi che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti; quelli che hanno la stessa base stanno fra loro come le altezze; e quelli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.

131. Teor. *Ogni triangolo ABD* (fig. 43) *è metà del rettangolo ABEF che à la stessa base e la stessa altezza.*

Le due figure date ABD , ABEF avendo la stessa base e la stessa altezza, avranno il vertice D ed il lato EF sulla stessa retta DE.

Dal punto B s'immagini condotta al lato AD la parallela BC la quale si prolunghi fino ad incontrare la DE in un punto C. Il quadrilatero ABCD, che è un parallelogrammo, è equivalente al rettangolo ABEF, che à la stessa base e la stessa altezza; onde il triangolo ABD, che è metà del parallelogrammo ABCD (81), sarà pure metà del rettangolo ABEF; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. *L'aja d'un triangolo è uguale alla metà del prodotto della base per l'altezza.*

Coroll. Due triangoli stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Coroll. I triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti; quelli che hanno la stessa base

stanno fra loro come le altezze ; e quelli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.

132. TEOR. *Ogni trapezio ABCD* (fig. 44) *è equivalente al rettangolo che à la sua stessa altezza DE e la base quanto la semisomma delle sue basi AB , DC.*

Ad una delle diagonali DB del trapezio si conducano per gli altri due vertici A , C le parallele AF , CH, che si prolunghino fino ad incontrare le basi CD , AB, del trapezio.

Essendo il triangolo ADB metà del parallelogrammo AFDB, ed il triangolo DCB metà del parallelogrammo DBHC, sarà la somma di tali due triangoli, ovvero il trapezio ABCD, metà dell'intero parallelogrammo AFCH, e quindi del rettangolo che à la stessa altezza DE e la stessa base AH; ma DE è l'altezza del trapezio, ed AH è quanto la somma delle sue basi AB , DC; dunque è vero l'en. teor.

COROLL. *L'aja di un trapezio è uguale al prodotto della altezza per la semisomma delle basi.*

SCOLIO. Poichè in ogni trapezio la semisomma delle basi è uguale alla retta che congiunge i punti medi dei lati non paralleli (86), può dirsi pure che . . . *l'aja di un trapezio è uguale al prodotto dell'altezza per la retta che unisce i punti medi dei lati non paralleli.*

SCOLIO. L'aja di un poligono qualunque è uguale alla somma dei triangoli nei quali resta diviso o conducendo da un suo vertice le diagonali a tutti gli altri vertici, o congiungendo un punto preso nel suo interno con tutti i vertici.

MISURA DEGLI ANGOLI

Nozioni preliminari

133. Ogni circonferenza si considera divisa in 360 parti uguali, che diconsi **gradi**; ogni grado in 60 parti uguali, che diconsi **minuti primi**; ogni minuto primo in 60 parti uguali, che diconsi **minuti secondi.**

La quarta parte della circonferenza dicesi **quadrante**.

l'assurdo che nel triangolo ADE l'angolo esterno ADC è uguale all'interno ed opposto E, perchè entrambi supplementi dell'angolo B.

137. Teor. *L'angolo formato da una tangente AB* (fig. 47) *e da una secante AD, che passa pel punto di contatto, à per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.*

Pel punto D s'immagini condotta la retta DE parallela alla tangente CB. I due angoli EDA, DAB sono uguali, perchè alterni interni; ma il primo EDA à per misura la metà dell'arco AE, dunque pure il secondo DAB à per misura la metà dell'arco AE, o dell'arco uguale AFD; onde è vero l'enunciato teorema.

Scolio. Poichè l'angolo BAD à per misura la metà dell'arco AFD, il suo supplemento CAD avrà per misura la metà dell'altro arco AED.

138. Teor. *Un'angolo CAE* (fig. 48, 49) *che à il vertice fuori, o dentro la circonferenza, à per misura nel primo caso la metà della differenza degli archi CE e BD intercetti tra i lati, e nel secondo caso la metà della somma degli archi CE e BD intercetti tra i lati ed i loro prolungamenti.*

Dal punto B, dove uno dei lati incontra la circonferenza, s'immagini condotta la parallela BF all'altro lato AE: sarà l'arco BD uguale all'arco FE (109). I due angoli CAE, CBF sono uguali, perchè corrispondenti; ma l'angolo CBF à per misura la metà dell'arco CF, dunque pure l'angolo CAE à per misura la metà dello stesso arco CF; ma l'arco CF è uguale alla differenza dei due CE, DB (fig. 48); ed è uguale alla somma dei due CE, DB (fig. 49); dunque è vero l'enunciato teorema.

Scolio. Il primo caso di questo teorema è pure vero quando uno dei lati dell'angolo, o tutti e due sono tangenti alla circonferenza.

NOTA — Erano già usciti dal torchio i quattro foglietti precedenti quando si è osservato essersi omesso il teorema che segue, al quale si è dato il numero (57 bis) per mostrare il posto che avrebbe dovuto occupare se non si fosse incorso in tale inavvertenza.

57 bis. Teor. *Due angoli che hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono o uguali, o supplementari.*

Siano i due angoli BAC , EDF (fig. 16 bis). Pel vertice A si suppongano condotte sui lati AB , AC le perpendicolari AM , AN. I due angoli MAN e BAC sono uguali, perchè ciascuno è quanto un retto diminuito, o aumentato dell'angolo BAN; ma MAN è uguale o supplemento di EDF (57), dunque pure BAC è uguale o supplemento di EDF; onde è vero l'enunciato teorema.

LIBRO SECONDO

RETTE PROPORZIONALI, E FIGURE SIMILI

Definizioni

139. Due figure si dicono **simili** quando hanno gli angoli uguali ed i lati **omologhi** proporzionali; o in altri termini quando hanno la stessa forma e differiscono solo per grandezza.

140. In due figure simili si dicono lati **omologhi** quelli che sono opposti, o adiacenti ad angoli uguali; e vertici **omologhi** i vertici degli angoli uguali.

141. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 1) *la retta DE parallela ad un lato BC divide gli altri due in parti proporzionali.*

Si conducano le rette BE, DC. I due triangoli ADE, BDE avendo le basi AD, BD per dritto, ed il vertice E comune, hanno la stessa altezza, e perciò stanno come le basi (131); onde sarà

ADE : BDE : : AD : DB.

Per una simile ragione i triangoli ADE, CDE danno

ADE : CDE : : AE : EC.

Ma queste due proporzioni hanno le prime ragioni uguali, a cagione che i triangoli BDE e CDE sono equivalenti per-

chè hanno la base comune DE e la stessa altezza, dunque le altre due ragioni danno la proporzione

AD : DB : : AE : EC;

onde è vero l'enunciato teorema.

Coroll. Eseguendo il componendo la proporzione precedente mostra pure che

AB : AD : : AC : AE, e che AB : DB : : AC : EC.

Scolio. In virtù di quanto ora si è detto conducendo DF parallela ad AC, ed osservando che DE è uguale ad FC, si à la proporzione

AB : AD : : BC : DE;

la quale ravvicinata alla precedente

AB : AD : : AC : AE

dà per conseguenza

AB : AD : : BC : DE : : AC : AE.

Questi tre rapporti uguali mostrano che i triangoli ABC ed ADE, che hanno gli angoli uguali, hanno pure i lati omologhi proporzionali, e perciò sono simili; onde può dirsi che quando in un triangolo si conduce una retta parallela ad un lato, si ottiene un triangolo parziale simile al triangolo totale perchè à con esso gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali.

Scolio. Considerando successivamente i triangoli ADE, AFL, AMN (fig. 2), nei quali le rette BC, DE, FL, MN sono parallele, si hanno i seguenti gruppi di rapporti

AB : AC : : BD : CE : : AD : AE,

AD : AE : : DF : EL : : AF : AL,

AF : AL : : FM : LN,

dai quali, per effetto dei rapporti comuni, si ricava la serie di rapporti uguali

AB : AC : : BD : CE : : DF : EL : : FM : LN;

che dà luogo al seguente enunciato . . . *I lati di un'angolo restano divisi in parti rispettivamente proporzionali dalle rette parallele che li tagliano.*

Considerando del pari (fig. 3) i triangoli ADM, AMN, ANE, si hanno, a cagione di BC parallela a DE, i gruppi di rapporti

BF : DM : : AF : AM,

AF : AM : : FH : MN : : AH : AN,

AH : AN : : HC : NE,

dai quali, in vista dei rapporti comuni, si ricava la serie di rapporti uguali

BF : DM : : FH : MN : : HC : NE;

che dà luogo al seguente enunciato . . . *Le rette condotte dal vertice di un triangolo sulla base dividono la base e la sua parallela in parti rispettivamente proporzionali.*

142. Teor. *La retta DE* (fig. 4) *che divide in parti proporzionali due lati AB, AC di un triangolo ABC, è parallela al terzo.*

Poichè supponendo che non sia DE parallela a BC, ma sia in vece DF, si avrà

AD : DB : : AF : FC;

ma per ipotesi AD : DB : : AE : EC,

dunque AF : FC : : AE : EC;

ma questa proporzione è falsa, perchè mentre il primo antecedente è maggiore del secondo, il primo conseguente è al contrario minore del secondo; dunque è pure falso il supporre che la retta DE non sia parallela a BC; onde è vero l'enunciato teorema.

143. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 5) *la retta AD, che divide per metà un angolo A, divide il lato opposto BC in due parti rispettivamente proporzionali ai lati dell'angolo diviso.*

Pel vertice B si conduca BE parallela ad AD, e si prolunghi il lato CA sino ad incontrare la detta parallela in E. Essendo l'angolo BAD uguale al suo alterno interno ABE, e l'angolo CAD uguale al suo corrispondente AEB, sarà, a cagione di BAD=CAD, angolo ABE=angolo AEB, e per conseguenza AE=AB. Nel triangolo BCE, essendo AD parallela a BE, sarà

CD : DB : : CA : AE,

ossia, ponendo in vece di AE la sua uguale AB,

CD : DB : : CA : AB;

onde è vero l'enunc. teor.

144. Teor. *Due triangoli ABC, DEF* (fig. 6), *che hanno gli angoli uguali sono simili.*

Siano gli angoli A, B, C rispettivamente uguali agli an-

goli D, E, F. Si sovrapponga il triangolo DEF all'altro ABC, in modo che gli angoli uguali D ed A combacino, e che il lato DE cada sul suo omologo AB, cosicchè AMN sia la nuova posizione del triangolo DEF. Essendo angolo B = angolo AMN, perchè ciascuno uguale all'angolo E, sarà MN parallela a BC, e per conseguenza il triangolo ABC sarà simile al triangolo AMN (141) ed al suo uguale DEF; onde è vero l'en. teor.

Coroll. Due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice uguali, o gli angoli alle basi uguali, sono equiangoli e perciò simili.

Coroll. Due triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto uguale sono equiangoli e perciò simili.

Scolio. In due triangoli equiangoli i lati opposti agli angoli uguali sono i lati proporzionali.

Scolio. In un triangolo rettangolo ABC (fig. 7) se dal vertice A dell'angolo retto si abbassa la perpendicolare AD sull'ipotenusa, i due triangoli parziali ADB, ADC, che ne risultano, sono equiangoli e simili tra loro ed al triangolo totale ABC.

145. Teor. *Due triangoli ABC, DEF* (fig. 6) *che hanno i lati rispettivamente proporzionali sono simili.*

Siano i lati AB, AC, BC rispettivamente proporzionali ai lati DE, DF, EF. Sul lato AB, proporzionale a DE, si tagli AM = DE, e si conduca MN parallela a BC.

Dal triangolo ABC, essendo MN parallela a BC, si à (141)

$$AB : AC : BC :: AM : AN : MN;$$

ma per ipotesi si à pure

$$AB : AC : BC :: DE : DF : EF,$$

dunque $\quad AM : AN : MN :: DE : DF : EF;$

e poichè per costruzione è AM = DE, sarà pure AN = DF, MN = EF, e triangolo AMN = triangolo DEF; ma il triangolo AMN è simile ad ABC, dunque pure il triangolo DEF è simile ad ABC; onde è vero l'en. teor.

Scolio. In due triangoli che hanno i lati proporzionali, gli angoli opposti ai lati proporzionali sono uguali,

Scolio. Dai due teoremi or dimostrati si à che nei triangoli le condizioni della similitudine, cioè eguaglianza di an-

goli e proporzionalità di lati, sono talmente collegate che ammessane una si à per conseguenza l'altra ; vale a dire che nei triangoli basta ammetter solo una delle dette due condizioni per poterli dir simili. Questa dipendenza che deriva dal fatto che in un triangolo non si possono alterare gli angoli senza alterare la proporzionalità dei lati, o viceversa, non si verifica nei poligoni che hanno più di tre lati; perocchè in questi si possono alterare gli angoli senza alterare la proporzionalità dei lati, e viceversa; come può rilevarsi dalla (fig. 8) immaginando i lati del poligono ABCD girevoli intorno ai propri vertici, oppure tagliato il poligono EFGH con una retta MN parallela ad un suo lato EF.

146. Teor. *Due triangoli ABC , DEF* (fig. 6) *che hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali sono simili.*

Sia angolo A = angolo D; e siano i lati AB,AC, che comprendono il primo , rispettivamente proporzionali ai lati DE , DF, che comprendono il secondo. Si consideri il triangolo DEF sovrapposto all'altro ABC in modo che l'angolo D combaci col suo uguale A, e che il lato DE cada sul suo proporzionale AB, cosicchè AMN sia la nuova posizione del triangolo DEF. Essendo per ipotesi

AB : AC : : DE : DF ,

sarà pure AB : AC : : AM : AN ;

la retta MN è dunque parallela a BC (142), e per conseguenza il triangolo ABC è simile al triangolo AMN, ed al suo uguale DEF; onde è vero l'en. teor.

147. Teor. *Due triangoli che hanno i lati rispettivamente paralleli, o rispettivamente perpendicolari, sono equiangoli e simili.*

Infatti poichè due angoli che hanno i lati paralleli, o perpendicolari, sono o uguali o supplementari (57, 57 bis), i due triangoli proposti non possono che avere gli angoli rispettivamente uguali; perocchè se ciò non fosse, e ne avessero due soli, o tutti e tre supplementari, ciascuno a ciascuno, la somma dei sei angoli interni dei due triangoli sarebbe maggiore di quattro retti; ciò che è assurdo; dunque è vero l'enunciato teorema.

Scolio. In due triangoli che hanno i lati paralleli, i lati omologhi sono i lati paralleli; ed in due triangoli che hanno i lati perpendicolari, i lati omologhi sono i lati perpendicolari.

118. Teor. *Due poligoni ABCD, EFHL* (fig. 9) *che sono composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili.*

I due triangoli ABC, EFH essendo simili e similmente posti, saranno gli angoli A, B, C del primo, rispettivamente uguali agli angoli E, F, H del secondo; e sarà inoltre

AB : EF : : BC : FH : : AC : EH.

Parimente i due triangoli ACD, EHL essendo simili e similmente posti saranno gli angoli A,C,D del primo, rispettivamente uguali agli angoli E, H, L del secondo; e sarà inoltre AC : EH : : CD : HL : : DA : LE.

Dalle dette relazioni si à che gli angoli A, B, C, D, del poligono ABCD, sono rispettivamente uguali agli angolo E, F,H,L, del poligono EFHL; e si à pure, a cagione del rapporto (AC : EH) comune alle due serie di rapporti segnati, che

AB : EF : : BC : FH : : CD : HL : : DA : LE;

onde i due poligoni avendo gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali sono simili; perciò è vero l'en. teor.

Scolio. Se i triangoli che compongono ciascuno dei due poligoni in vece di avere per vertice comune un vertice del poligono, avessero per vertice comune un punto qualunque preso dentro del medesimo, il teorema sussisterebbe sempre, e si dimostrebbe egualmente.

119. Teor. *Due poligoni simili ABCD, EFHL* (fig. 9) *sono composti dello stesso numero di triangoli simili, e similmente posti.*

Siano gli angoli A, B, C, D rispettivamente uguali agli angoli E, F, H, L; e sia inoltre

AB : EF : : BC : FH : : CD : HL : : DA : LE.

Da due vertici omologhi A, E si conducano le diagonali a tutti gli altri vertici. Essendo angolo B=angolo F, ed essendo i lati AB, BC, che comprendono il primo, proporzionali ai lati EF, FH, che comprendono il secondo, sarà il

triangolo ABC simile all'altro EFH, (146), e per consegnenza sarà angolo BCA=angolo FHE, e sarà inoltre

BC : FH : : CA : HE;

ma si a pure BC : FH : : CD : HL,

dunque CA : HE : : CD : HL.

Essendo gli angoli BCD,BCA rispettivamente uguali agli angoli FHL , FHE, sarà l'angolo ACD, differenza dei primi, uguale all'angolo EHL, differenza dei secondi; ma la proporzione precedente mostra che questi due angoli sono compresi fra lati rispettivamente proporzionali, dunque il triangolo ACD è simile all'altro EHL; onde essendo ciascuno dei triangoli che compongono il poligono ABCD simile e similmente posto a ciascuno dei triangoli che compongono il poligono EFHL, è vero l'en. teor.

150. Teor. *Due triangoli ABC , ADE* (fig. 10) *che hanno un angolo uguale stanno fra loro come i prodotti dei rispettivi lati che comprendono l'angolo uguale.*

Pei vertici B , E si conduca la retta BE. I due triangoli ABE , ADE avendo la stessa altezza stanno fra loro come le rispettive basi, cioè

ABE : ADE : : AB : AD.

Per una simile ragione paragonando i due triangoli ABC , ABE si a

ABC : ABE : : AC : AE;

moltiplicando fra loro queste due proporzioni, ed omettendo il fattore (ABE) comune ai termini della prima ragione che ne risulta, si à la proporzione enunciata

ABC : ADE : : AB×AC : AD×AE;

onde è vero l'en. teor.

Scolio. D'ora in poi il quadrato di una retta qualunque AB verrà indicato colla notazione $\overline{AB}^2$ (*leggi AB due, oppure AB quadrato*).

151. Teor. *Due triangoli simili ABC , DEF* (fig. 11) *stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Da due vertici omologhi A , D si suppongano abbassate le perpendicolari AM , DN sui lati opposti. I due triangoli

rettangoli ABM,DEN, avendo gli angoli acuti B ed E uguali, sono equiangoli e simili, e perciò danno la proporzione

$$AB : DE :: AM : DN,$$

la quale moltiplicata per l'altra

$$AB : DE :: BC : EF,$$

che risulta dalla simiglianza dei triangoli proposti, dà

$$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: AM \times BC : DN \times EF;$$

ma si à pure (131)

$$ABC : DEF :: AM \times BC : DN \times EF;$$

dunque $ABC : DEF :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$;

onde è vero l'en. teor.

152. Teor. *I perimetri dei poligoni simili ABCD, EFHL* (fig. 9) *stanno fra loro come i lati omologhi.*

I due poligoni ABCD, EFHL essendo simili i lati omologhi sono proporzionali, cioè

$$AB : EF :: BC : FH :: CD : HL :: DA : LE;$$

ma in una serie di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente qualunque sta al suo rispettivo conseguente, dunque

$$\text{perim. } ABCD : \text{perim. } EFHL :: AB : EF;$$

onde è vero l'en. teor.

153. Teor. *Due poligoni simili ABCD,EFHL* (fig. 9) *stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Da due vertici omologhi A ed E si conducano le diagonali a tutti gli altri vertici. Essendo ciascuno dei triangoli che compongono il poligono ABCD simile a ciascuno di quelli che compongono il poligono EFHL (149), si à

$$ABC : EFH :: \overline{BC}^2 : \overline{FH}^2; \qquad ACD : EHL :: \overline{CD}^2 : \overline{HL}^2;$$

ma a cagione della proporzionalità dei lati omologhi dei due poligoni si à pure

$$\overline{BC}^2 : \overline{FH}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{HL}^2,$$

dunque $ABC : EFH :: ACD : EHL,$

Applicando a questa serie di rapporti uguali il teorema che la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente qualunque sta al suo rispetti-

vo conseguente, si à la proporzione

ABCD : EFHL : : ABC : EFH;

che paragonata alla prima

ABC : EFH : : $\overline{BC}^2$: $\overline{FH}^2$,

colla quale à un rapporto comune, dà in fine

ABCD : EFHL : : $\overline{BC}^2$: $\overline{FH}^2$;

onde è vero l'en. teor.

PROPRIETÀ DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI DI TALUNE RETTE

154. Teor. *Il quadrato di una retta AC*, (fig. 12) *che è somma di due altre AB , BC, è uguale alla somma dei quadrati di queste rette, più due volte il rettangolo delle medesime.*

Sulla AC si supponga costruito il quadrato AD; si tagli AF=AB, e si conducano le rette BH , FL rispettivamente perpendicolari alle AC , AE. Per effetto della costruzione i due rettangoli EM ed MC sono uguali perchè hanno i lati uguali; e ciascuna delle due figure AM , MD è un quadrato perchè ha i lati uguali; ma il quadrato AD della retta somma AC, è uguale al quadrato AM della retta data AB, più il quadrato MD dell'altra retta data BC, più i due rettangoli uguali EM ed MC, che hanno per lati le medesime rette AB e BC, dunque è vero l'en. teor.

Scolio. L'enunciato di questo teorema, indicando con a e con b le due rette date, corrisponde alla formola algebrica seguente $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

155. Teor. *Il quadrato di una retta AC* (fig. 13) *che è differenza di due altre AB , BC, è uguale alla somma dei quadrati di queste rette, meno due volte il rettangolo delle medesime.*

Sulle due rette AB,BC si suppongano costruiti i quadrati AD , CN; si tagli AF=AC, e si conducano le rette CH,FL rispettivamente perpendicolari alle AB,AE. Per effetto della costruzione i due rettangoli EM ed MB sono uguali perchè hanno i lati uguali; ciascuna delle figure AM,MD è un quadrato perchè ha i lati uguali; ed i quadrati MD e CN sono

uguali perchè hanno i lati uguali. Posto ciò essendo le due figure ME ed MD uguali rispettivamente alle altre due MB e CN, sarà il rettangolo EL, che è somma delle prime, uguale al rettangolo MN, che è somma delle seconde; ma il quadrato AM della retta differenza AC, è uguale al quadrato AD della retta data AB, più il quadrato CN dell'altra retta data BC, meno i due rettangoli uguali EL ed MN, che hanno per lati le medesime rette AB e BC; dunque è vero l'en. teor.

Scolio. L'enunciato di questo teorema, indicando con a e con b le due rette date, corrisponde alla formola algebrica seguente $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

156. Teor. *Il rettangolo che à per lati la somma e la differenza di due rette AB,BC* (fig. 14) *è uguale alla differenza dei quadrati delle medesime rette.*

Sulla retta maggiore AB si supponga costruito il quadrato AE; si tagli BD=BC, ed AH=AD; e si conducano le DN, CP, HP, rispettivamente perpendicolari alle AC, AF. Per effetto della costruzione i tre rettangoli DO, BP, HN sono uguali perchè hanno i lati uguali; e la figura ME è un quadrato perchè à i lati uguali. Posto ciò essendo il rettangolo BP uguale al rettangolo HN, sarà tutto il rettangolo AP uguale alla figura AFNMOB; ma questa figura è uguale al quadrato AE, meno il quadrato ME; dunque pure il rettangolo AP, che à per lati AC ed AH, cioè la somma e la differenza delle rette date AB e BC, è uguale al quadrato AE della retta data AB, meno il quadrato ME dell'altra retta data BC; onde è vero l'en. teor.

Scolio. L'enunciato di questo teorema, indicando con a e con b le due rette date, corrisponde alla formola algebrica seguente $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

157. Teor. *In ogni triangolo rettangolo ABC* (fig. 15) *il quadrato AN della ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati BF, BL dei cateti.*

Dal vertice B dell'angolo retto si consideri abbassata sulla ipotenusa la perpendicolare BP; si congiungano i punti B ed N, A ed L, colle rette BN,AL. I due triangoli BCN,ACL sono uguali perchè hanno i lati BC, CN, uguali rispettivamente

ai lati LC, AC; e l'angolo BCN compreso fra' primi, uguale all'angolo ACL compreso tra'secondi, perchè ciascuno composto di un'angolo retto e dell'angolo comune BCA; ma il triangolo BCN è metà del rettangolo DN, che à la stessa base CN e la stessa altezza CD (131); ed il triangolo LAC è metà del quadrato BL, che à la stessa base CL, e la stessa altezza CB, a cagione che le rette BA e BE sono per dritto (36); dunque il rettangolo DN è equivalente al quadrato BL. Allo stesso modo, conducendo le rette BM e CF, si dimostra che il rettangolo DM è equivalente al quadrato BF; onde la somma dei due rettangoli AP e DN, ovvero il quadreto AN della ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati BL e BF dei due cateti; dunque è vero l'en. teor.

Coroll. In ogni triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro cateto.

Questo corollario ed il teorema principale si esprimono in formole come qui appresso

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\ ,\ \overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2\ ,\ \overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2.$$

Scolio. Siccome i rettangoli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le rispettive basi, paragonando ciascuno dei rettangoli AP e DN tanto al quadrato AN, quanto fra loro, e ponendo in vece dei rettangoli AP e DN i quadrati equivalenti $\overline{AB}^2$ e $\overline{BC}^2$, si hanno le tre proporzioni seguenti

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AD : AC \quad , \quad \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: DC : AC,$$
$$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AD : DC;$$

delle quali le prime due mostrano che. . . . il quadrato di un cateto sta al quadrato dell'ipotenusa come la projezione di tal cateto sulla ipotenusa sta all'ipotenusa; e la terza mostra che. . . . i quadrati dei cateti stanno fra loro come le rispettive projezioni sull'ipotenusa.

Scolio. Dall'essere i quadrati BF e BL rispettivamente equivalenti ai rettangoli DM e DN, si à

$$\overline{AB}^2=AD\times AC \qquad , \qquad \overline{BC}^2=DC\times AC,$$

e quindi

$$AD : AB :: AB : AC \quad , \quad DC : BC :: BC : AC;$$

vale a dire che. . . in ogni triangolo rettangolo il quadrato

di un cateto è uguale al rettangolo che à per lati la projezione di tal cateto sulla ipotenusa, è l'ipotenusa medesima; e che. . . un cateto è medio proporzionale tra la sua projezione sulla ipotenusa, e l'ipotenusa medesima.

Scolio. Siccome l'angolo ABC iscritto nel semicerchio è retto, i due enunciati ora detti danno luogo ai seguenti:

In ogni cerchio. . . il quadrato di una corda è uguale al rettangolo che à per lati la projezione di tale corda sul diametro che passa per un suo estremo, ed il diametro stesso; ed. . . ogni corda è media proporzionale tra la sua projezione sul diametro che passa per un suo estremo, ed il diametro stesso.

Scolio. A cagione che le figure simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi (153), costruendo tre figure simili qualunque su'lati di un triangolo rettangolo, sarà quella costruita sull'ipotenusa uguale alla somma di quelle costruite sui cateti; e quella costruita su di un cateto uguale alla differenza di quelle costruite sull'ipotenusa e sull'altro cateto.

158. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 16) *il quadrato del lato BC opposto all'angolo ottuso A, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, più due volte il rettangolo di uno di questi per la projezione che su di esso à l'altro lato.*

Dal vertice B, di uno degli altri due angoli, si consideri abbassata sul lato opposto la perpendicolare BD. Essendo la retta DC somma delle due AD ed AC, sarà (154) il quadrato di DC uguale al quadrato di AD, più il quadrato di AC, più due volte il rettangolo di AC per AD; onde aggiungendo all'una parte ed all'altra il quadrato della perpendicolare BD, sarà la somma dei quadrati di BD e DC, ovvero il quadrato di BC, uguale alla somma dei quadrati di BD ed AD, ovvero al quadrato di AB, più il quadrato di AC, più due volte il rettangolo di AC per AD; onde è vero l'en. teor.

Scolio. L'enunciato di questo teorema si traduce in formola come qui appresso

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AC\times AD.$$

159. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 16) *il quadrato del lato AB opposto all'angolo acuto C, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno due volte il rettangolo di uno di questi per la projezione che su di esso à l'altro lato.*

Dal vertice B, di uno degli altri due angoli, si consideri abbassata sul lato opposto la perpendicolare BD. Essendo la retta AD differenza delle due DC ed AC, sarà (155) il quadrato di AD uguale al quadrato di DC, più il quadrato di AC, meno due volte il rettangolo di AC per DC; onde, aggiungendo all'una parte ed all'altra il quadrato della perpendicolare BD, sarà la somma dei quadrati di BD ed AD, ovvero il quadrato di AB, uguale alla somma dei quadrati di BD e CD, ovvero al quadrato di BC, più il quadrato di AC, meno due volte il rettangolo di AC per DC; onde è vero l'enunciato teorema.

Scolio. L'enunciato di questo teorema si traduce in formola come qui appresso

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times DC.$$

Scolio. Dai tre teoremi precedenti si rileva che il solo triangolo rettangolo à la proprietà che il quadrato di un lato è uguale alla somma, o alla differenza dei quadrati degli altri due lati.

Defin. Dicesi **mediana** di un triangolo la retta che unisce un vertice col punto medio del lato opposto.

160. Teor. *In ogni triangolo ABC* (fig. 17) *la somma dei quadrati di due lati AB , BC è uguale a due volte il quadrato del terzo AC, più due volte il quadrato della sua mediana BM.*

Dal vertice B si supponga abbassata BP perpendicolare sù di AC. I triangoli ABM e CBM, in virtù dei due teoremi precedenti, danno le eguaglianze

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2AM \times MP,$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{BM}^2 + 2CM \times MP;$$

le quali, osservando essere $AM = CM$, addizionate danno

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2;$$

onde è vero l'en. teor.

Scolio. Se ABCD è un parallelogrammo, addizionando coll'eguaglianza precedente l'altra

$$\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{DM}^2,$$

che si à dal triangolo ADC, ed osservando che BM e DM sono uguali, si à l'eguaglianza

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{AM}^2+4\overline{BM}^2;$$

la quale, a cagione di $4\overline{AM}^2=(2AM)^2=\overline{AC}^2$, e di $4\overline{BM}^2=(2BM)^2=\overline{BD}^2$, si trasforma nell'altra

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2;$$

che dà luogo al seguente enunciato . . . in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

161. Teor. *Se da un punto E* (fig. 18) *preso dentro di un cerchio si conducono due corde AC, BD, il rettangolo delle parti dell'una è equivalente al rettangolo delle parti dell'altra.*

Si congiungano i punti A e B, D e C. I due triangoli ABE e DCE avendo gli angoli in E uguali perchè opposti al vertice, l'angolo A uguale all'angolo D perchè iscritti nello stesso segmento, sono equiangoli e simili; perciò si à

$$AE : ED :: EB : EC,$$

e quindi $AE\times EC=EB\times ED;$

onde è vero l'en. teor.

Scolio. La proporzione precedente mostra che le parti delle due corde sono tra loro reciprocamente proporzionali.

Scolio. Se le due corde sono fra loro perpendicolari, ed una di esse AC è diametro, sarà ED=EB (108), e perciò

$$AE : EB :: EB : EC;$$

e quindi $\overline{EB}^2=AE\times EC;$

vale a dire che... la perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del diametro; oppure che . . . il quadrato della detta perpendicolare è uguale al rettangolo dei due segmenti del diametro. Questo enunciato si modifica come qui appresso osservando che l'angolo ABC iscritto nel semicerchio è retto . . . in ogni triangolo rettangolo la per-

pendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto sulla ipotenusa è media proporzionale tra i due segmenti dell' ipotenusa; oppure che . . . il quadrato della detta perpendicolare è uguale al rettangolo dei due segmenti della ipotenusa.

162. TEOR. *Se da un punto E* (fig. 19) *preso fuori di un cerchio, si conducono due secanti EA, ED, terminate alla parte concava, il rettangolo di una di queste nella sua parte esterna, è equivalente al rettangolo dell'altra pure nella sua parte esterna.*

Si congiungano i punti A e C, B e D. I due triangoli AEC e DEB hanno l'angolo E comune, l'angolo A uguale all'angolo D, perchè iscritti nello stesso segmento, dunque sono equiangoli e simili; perciò si à

$$AE : ED :: EC : EB;$$

e quindi $$AE \times EB = ED \times EC;$$

onde è vero l'en. teor.

SCOLIO. La proporzione precedente mostra che le due secanti sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne.

163. TEOR. *Se da un punto B* (fig. 20) *preso fuori di un cerchio, si conduce una tangente BA, ed una secante BC terminata alla parte concava, il quadrato della tangente è equivalente al rettangolo della secante nella sua parte esterna.*

Si congiunga il punto di contatto A coi punti C, D. I due triangoli ABC ed ABD hanno l'angolo B comune, l'angolo BCA uguale all'angolo BAD, perchè misurati dalla metà dello stesso arco AD, dunque sono equiangoli e simili; perciò danno $$BC : BA :: BA : BD;$$

e quindi $$\overline{BA}^2 = BC \times BD;$$

onde è vero l'en. teor.

SCOLIO. La proporzione precedente mostra che la tangente è media proporzionale tra la secante intera e la sua parte esterna.

POLIGONI REGOLARI

164. Defin. Un poligono si dice **regolare** quando à gli angoli uguali ed i lati uguali.

165. Teor. *Ad ogni poligono regolare ABCDE* (fig. 21) *può essere circoscritta o iscritta una circonferenza.*

Si dividano per metà due angoli successivi A e B colle rette AO , BO ; e si congiunga il punto O, dove queste s'intersecano, cogli altri vertici del poligono.

1.°) I due triangoli AOB , BOC sono uguali perchè hanno gli angoli in B uguali compresi fra lati uguali ; e poichè gli angoli alla base AB sono uguali fra loro, anche gli angoli alla base BC saranno uguali fra loro, cioè sarà OBC=OCB; ma a cagione di ABC=BCD, essendo OBC metà di ABC , pure OCB sarà metà di BCD , e perciò sarà OCB=OCD. Procedendo allo stesso modo si dimostrerà che il triangolo BOC è uguale a COD, e quindi l'angolo ODC uguale ad ODE ; e così di seguito ; onde li triangoli AOB , BOC , COD, etc, essendo uguali ed isosceli , saranno i lati OA , OB , OC , OD , OE uguali fra loro ; per conseguenza se col centro O, e con uno di questi lati come raggio si descrive una circonferenza , la medesima passerà per tutti i vertici A , B , C , D , E, e sarà perciò circoscritta al poligono.

2.°) Essendo le corde AB , BC , etc, uguali fra loro , pure le perpendicolari OM, abbassate sulle medesime dal centro O, saranno uguali fra loro (116) ; onde descrivendo col centro O e col raggio OM una circonferenza, la medesima passerà pei punti M, e sarà tangente a ciascuno dei lati del poligono ABCDE (106) ; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Il punto O, centro della circonferenza tanto circoscritta che iscritta, si dice pure **centro del poligono**; e ciascuno degli angoli AOB , BOC , etc, che si à congiungendo il centro con due vertici successivi , si dice **angolo al centro del poligono.**

Scolio. Gli angoli al centro di un poligono regolare sono uguali fra loro , e ciascuno è uguale a quattro retti divisi pel numero dei lati del poligono.

SCOLIO. Le rette che congiungono il centro di un poligono regolare con i vertici dividono per metà gli angoli del poligono; o viceversa, le rette che dividono per metà gli angoli di un poligono regolare concorrono tutte nel centro.

SCOLIO. Il raggio del cerchio iscritto in un poligono regolare si dice **apotema** del poligono.

166. TEOR. *Due poligoni regolari ABCDE, FHLMN* (fig. 22) *dello stesso numero di lati sono simili.*

In ciascuno dei poligoni si congiunga il centro coi vertici. I triangoli AOB, BOC, etc, sono uguali ed isosceli, al pari dei triangoli FOH, HOL, etc; ma gli angoli intorno ai punti O sono tutti uguali, perchè ciascuno è la stessa parte di quattro retti, dunque li detti triangoli sono simili fra loro (144), e perciò i poligoni ABCDE, FHLMN, essendo composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili (148); onde è vero l'en. teor.

COROLL. I perimetri dei poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno come i lati, e le superficie come i quadrati dei lati.

167. TEOR. *I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati ABCDE, FHLMN* (fig. 22) *stanno come i raggi dei cerchi iscritti, o circoscritti; e le superficie come i quadrati dei medesimi raggi.*

Si congiunga il centro O con due vertici successivi C,D, e si abbassi OQ perpendicolare a CD: similmente si congiunga il centro O coi vertici M,L, e si abbassi OT perpendicolare ad ML. Essendo i due triangoli isosceli ODC,OML simili fra loro, ed essendo i due triangoli rettangoli ODQ, OMT pure simili fra loro, si avrà

$$DC : ML :: OD : OM \qquad \text{ed} \qquad OD : OM :: OQ : OT;$$

donde $\quad DC : ML :: OD : OM :: OQ : OT;$

e quindi $\quad \overline{DC}^2 : \overline{ML}^2 :: \overline{OD}^2 : \overline{OM}^2 :: \overline{OQ}^2 : \overline{OT}^2;$

ma, indicando con P, p i perimetri dei due poligoni, e con S, s le superficie, si à pure (152, 153)

$$P : p :: DC : ML \qquad \text{ed} \qquad S : s :: \overline{DC}^2 : \overline{ML}^2,$$

dunque $P : p :: OD : OM :: OQ : OT$;
ed $S : s :: \overline{OD}^2 : \overline{OM}^2 :: \overline{OQ}^2 : \overline{OT}^2$;
onde è vero l'en. teor.

168. Teor. *L'aja di un poligono regolare ABCDE* (fig. 22) *è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà dell'apotema.*

Si congiungano i vertici del poligono col centro O, e si abbassi OQ perpendicolare su di CD. Essendo i triangoli DOC,COB, etc, uguali fra loro, l'aja del poligono sarà uguale ad uno di essi DOC ripetuto tante volte per quanti sono i lati del poligono; ma l'aja del triangolo DOC è uguale alla base DC moltiplicata per la metà dell'altezza OQ, dunque l'aja del poligono ABCDE, è uguale a cinque volte DC, ovvero al perimetro ABCDE, moltiplicato per la metà di OQ; onde è vero l'en. teor.

169. Teor. *Se si congiungono i vertici A,B,C,D,E* (fig. 23) *di un poligono regolare col centro O, e si uniscono fra loro i punti* a , b , c , d , e , *dove queste congiungenti tagliano la circonferenza iscritta, si avrà un poligono regolare iscritto nella medesima, e simile al dato.*

Essendo isosceli tanto i triangoli AOB,BOC, ecc, quanto i triangoli *aob*,*boc*, etc, ed avendo tutti gli angoli al vertice comune O uguali fra loro, segue che sono simili; onde li poligoni ABCDE, *abcde* essendo composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili; dunque è vero l'en. teor.

Scolio. I lati del nuovo poligono dividendo i raggi AO,BO, CO, etc, in parti proporzionali, perchè OA=OB ed *oa*=*ob*, risulteranno paralleli a quelli del poligono dato (142); per conseguenza gli archi uguali *afb*, *bgc*, *cld*, etc, resteranno divisi per metà nei punti di contatto *f* , *g* , *l* , etc. (109); onde congiungendo fra loro tali punti di contatto, si avrà un altro poligono regolare iscritto *fglmn* pure simile al dato. Reciprocamente se dai punti medi degli archi che sottendono i lati di un poligono regolare iscritto, oppure dai vertici del medesimo, si conducono le tangenti al cerchio, si

avranno due poligoni regolari circoscritti simili allo iscritto.

Scolio. Dato un poligono regolare circoscritto in un cerchio si può sempre iscrivere nel medesimo un poligono regolare simile; e viceversa.

170. Teor. *Se si congiungono successivamente fra loro i vertici di un poligono regolare iscritto* abcd (fig. 24) *ed i punti medi degli archi sottesi dai suoi lati, si avrà un poligono regolare iscritto di un doppio numero di lati del dato.*

In fatti congiungendo successivamente fra loro i vertici a, b, c, d del poligono dato coi punti medi f, g, h, m, degli archi sottesi dai suoi lati, si avrà un poligono iscritto $afbg$ . . . il quale evidentemente à un numero doppio di lati del poligono dato; e dippiù è regolare a cagione che à i lati uguali, perchè corde di archi uguali, e gli angoli uguali, perchè iscritti in uguali segmenti; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Poichè conducendo pe' vertici del nuovo poligono iscritto $afbg$ . . . le tangenti al cerchio si à un poligono regolare circoscritto simile ad $afbg$ . . . e perciò di un doppio numero di lati tanto del poligono iscritto $abcd$, quanto del poligono simile circoscritto ABCD; può dirsi che . . . avendo un poligono regolare circoscritto, se pei punti medi degli archi compresi fra i punti di contatto dei suoi lati colla circonferenza, si conducono le tangenti alla medesima, queste formeranno coi lati del poligono dato un nuovo poligono circoscritto di un doppio numero di lati del dato.

Scolio. Siccome avendo un poligono regolare iscritto in una circonferenza data se ne può sempre iscrivere un 2.° di un doppio numero di lati del 1.°; indi un 3.° di un doppio numero di lati del 2.°; e così di seguito; è chiaro che progredendo in tale operazione si avranno dei poligoni regolari iscritti i cui perimetri andranno di più in più avvicinandosi alla circonferenza data, a cagione che i lati dei medesimi vanno rapidamente crescendo di numero, e decrescendo in grandezza; onde se tale costruzione potesse continuarsi sino ad ottenere un poligono d'infiniti lati, il suo perimetro dovrebbe confondersi colla circonferenza data, il raggio della quale sarebbe, in tal caso, quanto l'apotema

del detto poligono. È per tale osservazione che . . . *la circonferenza del cerchio può considerarsi come il perimetro di un poligono regolare d'infiniti lati infinitamente piccoli.*

AJA DEL CERCHIO E RAPPORTO DELLA CIRCONFERENZA AL DIAMETRO

171. Defin. Due archi, due segmenti, due settori si dicono simili quando corrispondono ad angoli al centro uguali, in cerchi disuguali.

172. Teor. *Le circonferenze di due cerchi stanno fra loro come i raggi, e le aje come i quadrati dei raggi.*

Essendosi già dimostrato che i perimetri dei poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno come i raggi dei cerchi iscritti, e le aje come i quadrati di tali raggi (166), considerando i due cerchi dati come poligoni regolari di uno stesso numero infinito di lati, ed indicandone con R ed r i raggi, con *circ.R* e *circ.r* le circonferenze, e con *sup.R* e *sup.r* le superficie, si avrà

$$\text{circ.R} : \text{circ.r} :: \text{R} : \text{r} \qquad \text{e} \qquad \text{sup.R} : \text{sup.r} :: \text{R}^2 : \text{r}^2;$$

onde è vero l'en. teor.

Coroll. Dalla proporzione dimostrata

$$\text{circ.R} : \text{circ.r} :: \text{R} : \text{r},$$

si ricava

$$\text{circ.R} : \text{circ.r} :: 2\text{R} : 2\text{r},$$

e quindi

$$\frac{\text{circ.R}}{2\text{R}} = \frac{\text{circ.r}}{2\text{r}};$$

vale a dire che . . . il rapporto di ogni circonferenza al suo diametro è un numero costante.

Scolio. Indicando colla lettera greca π *(leggi pi)* il numero costante che rappresenta il rapporto di ogni circonferenza al suo diametro, si avrà $\frac{\text{circ.R}}{2\text{R}} = \pi$, e quindi la formola

$$\text{circ.R} = 2\pi\text{R};$$

la quale è importante perchè serve a determinare approssimativamente la lunghezza di una circonferenza quando è

dato il raggio, ed il raggio quando è data la circonferenza.

Scolio. Pel detto numero costante π, che è **incommensurabile** si hanno i tre valori approssimati seguenti

$$\pi = \frac{22}{7}; \qquad \pi = \frac{355}{113}; \qquad \pi = 3{,}141592......$$

Di questi valori il primo è dovuto ad *Archimede*, ed è approssimato sino ai centesimi; il secondo è dovuto a *Mezio*, ed è approssimato sino ai milionesimi; ed il terzo, che è espresso in cifre decimali, si è calcolato sino alla 155.ª cifra, delle quali cifre le prime sei sono quelle riportate.

173. Teor. *Gli archi simili stanno fra loro come i raggi, ed i settori simili come i quadrati dei raggi* (fig. 25).

Infatti poichè

arc. AB : circ. AC : : ang. C : 4 retti,

e poichè

arc. DE : circ. DF : : ang. F : 4 retti,

si avrà, a cagione che i due angoli C ed F sono uguali

arco AB : arco DE : : circ. AC : circ. DF;

ma si à pure

circ. AC : circ. DF : : AC : DF,

dunque arco AB : arco DE : : AC : DF.

Similmente poichè

sett. ABC : sup. AC : : ang. C : 4 retti,

e poichè

sett. DEF : sup. DF : : ang. F : 4 retti,

sarà sett. ABC : sett. DEF : : sup. AC : sup. DF;

ma si à pure

sup. AC : sup. DF : : $\overline{AC}^2 : \overline{DF}^2$,

dunque sett. ABC : sett. DEF : : $\overline{AC}^2 : \overline{DF}^2$;

onde è vero l'en. teor..

174. Teor. *L'aja del cerchio è uguale alla metà del raggio moltiplicata per la circonferenza.*

Infatti poichè l'aja d'un poligono regolare è uguale alla metà dell'apotema moltiplicata pel perimetro, considerando il cerchio come un poligono regolare d'infiniti lati, si

avrà che la sua aja sarà uguale alla metà del raggio moltiplicata per la circonferenza; onde è vero l'en. teor.

Scolio. Indicando con R il raggio di un cerchio sarà

$$\text{sup.}\,R = \tfrac{1}{2}\,R \times \text{circ.}\,R\ ;$$

ovvero, ponendo per circ. R il suo valore $2\pi R$, sarà

$$\text{sup.}\,R = \pi R^2$$

Questa formola, che è importante perchè serve a determinare approssimativamente la superficie di un cerchio quando è dato il raggio, ed il raggio quando è data la superficie, mostra che per avere esattamente l'aja d'un cerchio, bisognerebbe avere esattamente il rapporto della circonferenza al diametro.

175. Teor. *L'aja di un settore ABC* (fig. 25) *è uguale al suo arco AB moltiplicato por la metà del raggio.*

Infatti poichè

$$\text{sup.}\,AC : \text{sett.}\,ABC :: \text{cir.}\,AC : \text{arc.}\,AB,$$

sarà pure, moltiplicando per $\frac{1}{2}$ AC i termini del secondo rapporto,

$$\text{sup.}\,AC : \text{sett.}\,ABC :: \tfrac{1}{2}AC \times \text{cir.}\,AC : \tfrac{1}{2}AC \times \text{arc.}\,AB;$$

e poichè gli antecedenti di questa proporzione sono uguali fra loro (174), pure i conseguenti lo saranno, e si avrà perciò

$$\text{sett.}\,ABC = \tfrac{1}{2}AC \times \text{arc.}\,AB;$$

onde è vero l'en. teor.

Coroll. L'aja di un segmento AMBH è uguale a quella del settore ACBM, meno quella del triangolo ACB.

176. Probl. *Dati i perimetri di due poligoni regolari simili di* n *lati, l'uno iscritto e l'altro circoscritto; determinare i perimetri di due altri poligoni regolari simili di* 2n *lati, l'uno iscritto e l'altro circoscritto.*

Siano AB e CD (fig. 26) i lati dei due poligoni dati: se si congiunge il centro O col punto di contatto E; e dai punti A, B si conducono le tangenti AF, BH, e le corde AE, BE; e si congiunge in fine il centro O coi punti F, H; saranno AE ed FH i lati dei due poligoni cercati (170).

1.°) I due triangoli rettangoli AFO, EFO, avendo gli angoli acuti in F uguali, avranno quelli in O pure ugua-

li; quindi dal triangolo COE, nel quale l'angolo COE è diviso per metà dalla retta OF, si à (143)

CF : FE : : CO : EO, ovvero CF : FE : : CO : AO;

ma a cagione di AB parallela a CD si à pure

CD : AB : : CO : AO, dunque CF : FE : : CD : AB.

Da questa proporzione, componendo prima e moltiplicando poi per 2 i termini del primo rapporto che ne risulta, si ricava CD : FH : : AB + CD : AB,

ovvero, moltiplicando gli antecedenti per n ed i conseguenti per $2n$,

$n \times$CD : $2n \times$FH : : $n \times$AB$+n \times$CD : $2n \times$AB.

Ora se per semplicità i perimetri dati, che sono $n \times$AB ed $n \times$CD, si rappresentano con p_n e P_n, e quelli cercati, che sono $2n \times$AE e $2n \times$FH, si rappresentano con p_{2n} e P_{2n}, la detta proporzione si cambia nella seguente

$P_n : P_{2n} : : p_n + P_n : 2p_n$,

dalla quale si ricava pel perimetro circoscritto cercato l'espressione

$$P_{2n} = \frac{2 \times p_n \times P_n}{p_n + P_n}.$$

2.°) Essendo AE media proporzionale tra EM, ossia 2OE, ed EL (157), si à

2OE : AE : : AE : EL;

ma dai due triangoli ALE ed FOE, che hanno i lati rispettivamente perpendicolari si à

OE : AL : : EF : EL,

ovvero, moltiplicando per 2 gli antecedenti,

2OE : AL : : FH : EL,

dunque AL : AE : : AE : FH.

Da questa proporzione, moltiplicandone i termini per $2n$, ed osservando che $2n \times$AL è lo stesso che $n \times$AB, si à l'altra

$n \times$AB : $2n \times$AE : : $2n \times$AE : $2n \times$FH,

ovvero $p_n : p_{2n} : : p_{2n} : P_{2n}$;

dalla quale si ricava pel perimetro del poligono iscritto cercato l'espressione seguente

$$p_{2n} = \sqrt{p_n \times P_{2n}}.$$

177. Prob. *Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.*

Nelle due formole generali determinate nel problema precedente, cioè

$$P_{2n}=\frac{2p_n\times P_n}{p_n+P_n}; \qquad P_{2n}=\sqrt{p_n\times P_{2n}}$$

facendo successivamente $n=4$, $n=8$, $n=16$, etc, si avranno in vece le formole particolari

$$P_8=\frac{2p_4\times P_4}{p_4+P_4}; \quad p_8=\sqrt{p_4\times P_8} \qquad (1)$$

$$P_{16}=\frac{2p_8\times P_8}{p_8+P_8}; \quad p_{16}=\sqrt{p_8\times P_{16}} \qquad (2)$$

$$P_{32}=\frac{2p_{16}\times P_{16}}{p_{16}+P_{16}}; \quad p_{32}=\sqrt{p_{16}\times P_{32}} \qquad (3)$$

" " " "

dalle quali, conoscendo in numeri i perimetri di due quadrati l'uno iscritto e l'altro circoscritto, potranno successivamente ottenersi, pure in numeri, i perimetri dei poligoni regolari iscritti e circoscritti di 8, 16, 32, 64. . . lati; e poichè il lato AB (fig. 26) del quadrato iscritto ABNP è uguale ad $AO\sqrt{2}$, a cagione che il triangolo AOB è rettangolo ed isoscele; ed il lato CD del quadrato circoscritto CDRT è uguale al diametro 2AO; prendendo il diametro 2AO come unità, si avrà pel perimetro del quadrato iscritto $p_4=2\sqrt{2}$; e per quello circoscritto $P_4=4$. Sostituendo dunque questi valori numerici di p_4 e P_4 nelle due formole (1) si avranno i valori numerici di P_8 e p_8; che sostituiti alla lor volta nelle due formole (2) daranno i valori numerici di P_{16} e p_{16}; così continuando si è calcolato il quadro qui appresso riportato, dal quale si scorge che essendo i perimetri dei due poligoni regolari simili iscritto e circoscritto di 8192 lati rappresentati da due numeri decimali che hanno di comune le prime sei cifre, può senza sensibile errore ritenersi che lo stesso numero 3,141592.... rappresenti il valore numerico approssimativo della circonferenza fra

loro compresa; ma questa circonferenza à per diametro l'unità, e quando il diametro è uno, circ. R è uguale a $\frac{\text{cir. R}}{2\text{R}}$ ovvero a π, dunque il numero costante π, ovvero il rapporto della circonferenza al diametro, è prossimamente uguale a 3,141592.....

num. de' lati	perim. circoscr.	perim. iscritto
4	4,000000	2,828427
8	3,313707	3,061466
16	3,182597	3,121444
32	3,151723	3,136547
64	3,144118	3,140331
128	3,142223	3,141276
256	3,141750	3,141513
512	3,141631	3,141572
1024	3,141602	3,141586
2048	3,141594	3,141590
4096	3,141593	3,141591
8192	3,141592	3,141592

PROBLEMI

1. *Da un punto A* (fig. 1) *dato su di una retta BC si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima.*

Si prendano due punti B,C egualmente lontani dal punto dato A; coi centri B , C, e con un raggio maggiore di BA, si descrivano due circonferenze; si congiunga uno dei punti D, dove tali circonferenze si tagliano, col punto dato A; sarà AD la perpendicolare dimandata.

Scolio. La stessa costruzione serve a formare un angolo retto in un punto di una retta data.

2. *Dall' estremo A* (fig. 2) *di una retta AB si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima senza prolungarla.*

Da un punto qualunque C come centro, e col raggio CA, si descriva una circonferenza , che tagli la retta data AB; pel punto d'intersezione B si conduca il diametro BD; si congiunga il punto D col punto dato A; sarà AD la perpendicolare dimandata.

3. *Da un punto A* (fig. 3) *dato fuori di una retta BC, si vuole abbassare la perpendicolare alla medesima.*

Col centro A, e con un raggio arbitrario, si descriva una circonferenza che tagli la retta BC; dai punti d'intersezione B e C, come centri, e con un raggio maggiore della metà di BC, si descrivano due circonferenze; si congiunga uno dei punti D, dove le medesime si tagliano, col punto dato A; sarà AD la perpendicolare dimandata.

4. *Si vuol dividere una retta data BC* (fig. 3) *in due parti uguali.*

Si descrivano due circonferenze che abbiano per centri rispettivi gli estremi B, C della retta data, e per raggio comune una retta maggiore della metà di BC; si congiungano fra loro i punti D, dove le dette circonferenze si tagliano; sarà il punto M, dove la DD incontra la BC, il punto medio della BC.

5. *Da un punto dato A* (fig. 4) *si vuol condurre la parallela ad una retta data BC.*

Dal punto A si abbassi la perpendicolare AD sulla BC, e dallo stesso punto A s'innalzi la perpendicolare AE sulla AD; sarà AE la parallela dimandata.

Oppure col centro A si descriva una circonferenza che tagli la retta data BC; da uno dei punti d'intersezione C come centro, e collo stesso raggio CA si descriva l'arco AB; si tagli l'arco CE uguale all'arco AB, e si congiunga il punto A col punto E; sarà AE la parallela dimandata.

6. *Da un punto A* (fig. 5) *dato su di una retta AB se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima AB un angolo uguale ad un angolo dato C.*

Coi centri A, C, e con uno stesso raggio, si descrivano due archi BF, DE; si prenda l'arco BF uguale all'arco DE, e si congiunga il punto F col punto A; sarà FA la retta dimandata.

Scolio. Se l'angolo da costruirsi si volesse doppio, triplo, etc, dell'angolo dato, bisognerebbe prender l'arco BF doppio, triplo, etc, dell'arco DE.

7. *Da un punto A* (fig. 6), *dato fuori di una retta BC, se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima BC un'angolo uguale ad un angolo dato DEF.*

In un punto qualunque H della retta BC si formi l'angolo LHC uguale al dato DEF, e pel punto dato A si conduca AB parallela ad LH; sarà AB la retta dimandata.

8. *Per un punto dato A (fig. 7) si vuol condurre una retta in modo che la parte intercetta tra due parallele date BD,CE, sia quanto una retta data.*

Con un raggio uguale alla retta data, e col centro un punto qualunque E preso sopra una delle parallele, si descriva una circonferenza; si congiunga uno dei punti d'intersezione D di questa e dell'altra parallela col centro E, e pel punto dato A si conduca a tale congiungente la parallela AB, che sarà proprio la retta dimandata.

Scolio. Questo problema, che ammette in generale due soluzioni, non è possibile quando la parte intercetta tra le due parallele si volesse minore della loro distanza.

9. *Determinare sopra una retta data AB (fig. 8) un punto C tale che congiunto con due punti dati D,E risulti l'angolo d'incidenza DCA uguale all'angolo di riflessione ECB.*

Da uno dei punti dati si abbassi sulla AB la perpendicolare DA; sul prolungamento di questa si prenda AF=AD, e si congiunga il punto F coll'altro punto dato E; sarà il punto C, dove la FE taglia la AB, il punto dimandato.

10. *Dati due angoli A e B di un triangolo si vuole determinare il terzo.*

All'estremo C (fig. 9) di una retta CD si formi l'angolo DCE uguale ad A, ed all'altro estremo D si formi l'angolo CDE uguale a B; sarà l'angolo CED, che risulta dall'intersezione delle due rette CE, DE, l'angolo cercato.

Scolio. Per essere possibile questo problema è necessario che la somma dei due angoli dati sia minore di due retti.

Scolio. Se i due angoli A, B fossero dati numericamente, il valore del terzo si otterrebbe sottraendo da 180° la somma dei due angoli dati A, B.

11. *Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo ed i lati che lo comprendono, rispettivamente uguali ad un angolo dato A ed a due rette pur date B, C.*

Si formi un angolo F (fig. 10), uguale al dato A; si tagli FD=B, FE=C, e si congiungano i punti D, E; sarà DEF il triangolo dimandato.

12. *Si vuol costruire un triangolo che abbia un lato e gli angoli al medesimo adiacenti, uguali rispettivamente ad una retta data A, ed a due angoli pur dati B , F.*

Agli estremi C , D (fig. 9), di una retta CD=A, si formino gli angoli DCE,CDE rispettivamente uguali ai dati B,F; sarà CDE il triangolo dimandato.

Scolio. Se la somma dei due angoli dati non è minore di due retti, il problema è impossibile.

Scolio. Se uno degli angoli proposti non è adiacente al lato dato, si determinerà prima il terzo angolo del triangolo, e poi si risolverà il problema come ora si è detto.

13. *Si vuol costruire un triangolo che abbia i tre lati rispettivamente uguali a tre rette date A , B , C.*

Si prenda una retta DE=A (fig. 11); col centro D e col raggio B si descriva una circonferenza; col centro E e col raggio C si descriva un'altra circonferenza; si congiunga uno dei punti F, dove le descritte circonferenze si tagliano, coi punti D , E; sarà DEF il triangolo dimandato.

Scolio. Se ciascuna delle rette date non è minore della somma delle altre due il problema è impossibile.

14. *Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo e due lati, l'uno adiacente e l'altro opposto al detto angolo, uguali rispettivamente ad un angolo dato A ed a due rette pur date B , C.*

Si faccia un angolo EDF (fig. 12) uguale al dato A; si tagli DE=B; col centro E, e con un raggio uguale a C si descriva una circonferenza, la quale taglierà il lato DF in qualche punto F; si congiunga il punto F col punto E, e sarà DEF il triangolo cercato.

Scolio. Se l'angolo dato è ottuso, o retto, perchè il problema sia possibile, è necessario che il lato ad esso opposto sia maggiore di quello adiacente. Se poi l'angolo dato è acuto il lato ad esso opposto potrà essere o maggiore o minore di quello adiacente; nel 1.° caso la descritta circonferenza taglierà il lato DF in un sol punto F posto dalla stessa parte dell'angolo costruito EDF, e perciò vi sarà un solo triangolo DEF, che soddisfa alle condizioni del problema;

nel 2.° caso la circonferenza descritta taglierà il lato DF in due punti G,H posti entrambi dalla stessa parte dell'angolo costruito EDF, e perciò vi saranno due triangoli DEG,DEH che soddisfano alle condizioni del problema.

Generalmente parlando il problema è impossibile quando il lato opposto all'angolo D è minore della perpendicolare EM abbassata dal punto E sul lato DF.

15. *Si vuol costruire un triangolo equilatero su di una retta data AB* (fig. 13).

Coi centri A, B, e con un raggio uguale ad AB, si descrivano due circonferenze; si congiunga uno dei punti C, dove le dette circonferenze si tagliano, coi punti A,B; sarà ABC il triangolo dimandato.

16. *Su di una retta data AB* (fig. 14), *come lato, si vuol costruire il quadrato.*

All'estremo A della retta AB si formi l'angolo retto BAD; col centro A e col raggio AB si descriva il quadrante BED; coi centri B, D, e collo stesso raggio AB, si descrivano due archi AFC, AEC; si congiunga il punto C, dove questi archi si tagliano, coi punti B, D; sarà ABCD il quadrato dimandato.

17. *Sopra una retta data AC* (fig. 15), *come diagonale, si vuol costruire il quadrato.*

Sulla retta data AC come diametro si descriva una circonferenza; si conduca il diametro BD perpendicolare all'altro AC, e si congiungano successivamente fra loro i quattro punti A, B, C, D; sarà ABCD il quadrato richiesto.

18. *Si vuol dividere un angolo dato ABC* (fig. 16) *in due parti uguali.*

Col centro B, e con un raggio arbitrario BA, si descriva l'arco AMC; dal centro B si abbassi la perpendicolare BD sulla corda AC; sarà l'angolo ABC diviso in due parti uguali dalla retta BD.

Scolio. Questa stessa costruzione serve a dividere un arco dato AMC in due parti uguali.

Scolio. Ripetendo quel che si è fatto per l'angolo ABC, su ciascuno degli angoli parziali ABM, MBC, si verrà a dividere l'angolo proposto in quattro parti uguali; quindi potrà dividersi in 8, in 16, in 32, etc, parti uguali.

19. *Si vuol dividere un'angolo retto in tre parti uguali.* Su di una parte qualunque AC (fig. 17), di uno dei lati dell'angolo retto dato DAC, si costruisca un triangolo equilatero ABC; sarà BAD la terza parte dell'angolo retto DAC.

Scolio. L'angolo retto è il solo che possa dividersi in tre parti uguali col mezzo della geometria.

20. *Determinare la bisettrice dell'angolo che farebbero due rette date che non possono prolungarsi fino al loro punto d'incontro.*

Per un punto qualunque A (fig. 18) di una delle rette date AB si conduca la parallela AC all'altra retta data DE; dell'angolo BAC che si ottiene si determini la bisettrice AF, alla quale si conduca una perpendicolare qualunque BE; di questa perpendicolare si divida per metà la parte BE compresa fra le rette date, e dal punto medio ottenuto M si conduca alla BE la perpendicolare MN, che sarà proprio la retta dimandata.

21. *Si vuol trovare il centro di una circonferenza data ABD* (fig. 19).

Da un punto qualunque B della circonferenza data si conducano due corde BA e BD, sulle quali s'innalzino dai loro punti medi E,F le perpendicolari EC,FC; sarà il punto C, dove le dette perpendicolari s'incontrano, il centro della circonferenza data.

Scolio. Questa stessa costruzione serve a determinare il centro di un'arco qualunque di cerchio.

22. *Per un punto B* (fig. 20) *dato su di una circonferenza BFF si vuol condurre la tangente alla medesima.*

Si congiunga il punto dato B col centro C; dal punto B s'innalzi al raggio BC la perpendicolare BD, che sarà proprio la tangente dimandata.

Scolio. Per un punto dato sulla circonferenza non si può condurre che una sola tangente alla medesima.

23. *Per un punto A* (fig. 20) *dato fuori di una circonferenza BFF si vuole condurre una tangente alla medesima.*

Si congiunga il punto dato A col centro C; sulla AC come diametro si descriva una circonferenza; si congiunga uno dei punti F, dove le due circonferenze si tagliano, col punto dato A; sarà AF la tangente dimandata.

Scolio. Per un punto dato fuori di una circonferenza si possono condurre alla medesima due tangenti; delle quali le parti AF, comprese tra il punto dato ed i punti di contatto sono uguali fra loro, perchè uguali fra loro sono i triangoli rettangoli AFC.

24. *Condurre ad una circonferenza data una tangente parallela ad una retta pur data.*

Pel centro C (fig. 21) della circonferenza data si conduca la perpendicolare CD alla retta data AB, e da uno dei punti d'intersezione E, di questa perpendicolare colla circonferenza, si conduca alla medesima la tangente EM, che sarà proprio la tangente dimandata.

Scolio. Questo problema ammette, come vedesi, due soluzioni.

25. *Per un punto dato A* (fig. 22) *si vuol condurre ad un cerchio dato C una secante tale che la sua parte intercetta nel cerchio sia quanto una retta data.*

Nel cerchio dato si adatti una corda BD uguale alla retta data; col centro C e col raggio la perpendicolare CE abbassata sulla corda BD si descriva una circonforenza, alla quale conducendo pel punto dato A la tangente AF si avrà la secante dimandata.

Scolio. Questo problema ammette, generalmente parlando, due soluzioni.

26. *Condurre una tangente comune a due cerchi dati.*

Si descriva una circonferenza che abbia per centro il centro A (fig. 23) del cerchio maggiore, e per raggio la diffe-

renza AD dei due raggi AM , BN; pel centro B del cerchio minore si conduca alla circonferenza descritta la tangente BD; sù questa tangente si conducano nello stesso verso i raggi perpendicolari AM , BN, i cui estremi M ed N congiunti fra loro con una retta MN, danno la tangente domandata.

Scolio. La indicata costruzione mostra esser due le tangenti esterne comuni che possono condursi a due cerchi dati.

Scolio. Se la detta costruzione si rifà colla differenza che il raggio della circonferenza descritta sia quanto la somma AD (fig. 24) dei raggi AM,BN dei cerchi dati, e che i raggi AM,BN, condotti perpendicolarmente alla tangente BD, siano rivolti in senso opposto, si avranno, invece delle due tangenti esterne ottenute di sopra, le due tangenti interne MN; ond'è che il problema , generalmente parlando, è suscettibile di quattro soluzioni.

27. *Su di una retta data AB* (fig. 25) *si vuol costruire un segmento di cerchio capace di contenere un angolo dato.*

All'estremo B, della retta data AB, si formi l'angolo ABE uguale al dato ; dal punto B s'innalzi sulla BE la perpendicolare BC; sulla AB, e dal suo punto medio F, s'innalzi la perpendicolare FC, che incontrerà la BC in qualche punto C ; col centro C e col raggio CB si descriva una circonferenza ADB ; sarà ADB il segmento dimandato.

Scolio. Se l'angolo proposto è retto, il problema si riduce a descrivere sulla retta data AB, come diametro, una semi circonferenza.

28. *Si vuol trovare il rapporto numerico di due rette date A , B; o di due angoli dati.*

Si porti la retta minore B sulla maggiore A tante volte per quanto si può; indi il resto di tale operazione, che indicheremo con C, si porti sulla retta B tante volte per quanto si può; indi il resto di questa seconda operazione, che indicheremo con D, si porti sulla retta C tante volte per quanto si può; e così proseguendo potrà avvenire

1.°) che si giungerà ad un ultimo resto zero; in tal ca-

so il penultimo resto sarà la comune misura delle due rette proposte, delle quali sarà facile esprimerne numericamente il rapporto, prendendo per unità la comune misura cennata. Infatti supponendo che B sia contenuta 2 volte in A; che C sia contenuta 1 volta in B; e che D sia contenuta 3 volte esattamente in C, si avrà, prendendo la retta D come unità, che la retta C sarà uguale a 3; la retta B sarà uguale a 4; e la retta A sarà uguale ad 11; onde si avrà

$$A : B :: 11 : 4;$$

2.°) che non si giungerà mai ad un resto zero; in tal caso le due rette proposte non hanno misura comune, si dicono **incommensurabili**, ed il loro rapporto non può aversi che approssimativamente.

Se invece di due rette fossero proposti due angoli, si troverebbe il loro rapporto numerico, operando sugli archi che li misurano allo stesso modo che si è detto per le rette.

29. *Si vuol trovare il rapporto della diagonale AC* (fig. 15) *al lato AB del quadrato.*

Essendo il triangolo ABC rettangolo ed isoscele si avrà

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2,$$

donde $$\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1,$$

e quindi $$AC : AB :: \sqrt{2} : 1;$$

ma $\sqrt{2}$ è incommensurabile coll'unità, dunque pure la diagonale AC è incommensurabile col lato AB del quadrato.

Scolio. Il rapporto della diagonale al lato del quadrato quantunque non possa ottenersi esattamente, pure, avendosi dalla proporzione precedente

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

potrà approssimarsi al vero quanto più piace, estraendo la radice di 2 con quante cifre decimali si vogliono.

30. *Trovare una quarta proporzionale in ordine a tre rette date A, B, C* (fig. 26).

Su i lati di un angolo qualunque HEL si tagli EF = A,

FH = B, ed ED = C; si congiunga il punto F col punto D, e si conduca HL parallela ad FD; sarà DL la quarta proporzionale dimandata.

Oppure si tagli EF = A, EM = B, ed ED = C; si congiunga il punto F col punto D, e si conduca MN parallela ad FD; sarà EN la retta dimandata.

Scolio. Se la ED si taglia pure uguale a B, sarà DL, oppure EN, la terza proporzionale in ordine alle due rette A, B.

31. *Trovare la media proporzionale tra due rette date A, B* (fig. 27).

Su di una retta indefinita CE si tagli CD = A, e DE = B; sulla CE, come diametro, si descriva una semicirconferenza; dal punto D s' innalzi sulla CE la perpendicolare DF, che sarà proprio la media proporzionale dimandata.

Oppure si tagli CD = A, e CH = B; sulla CD come diametro si descriva una semicirconferenza; dal punto H s'innalzi sulla CD la perpendicolare HL e si conduca la corda CL, che sarà proprio la retta dimandata.

32. *Si vuol dividere una retta data AB* (fig. 28) *in parti proporzionali a delle rette date M, N, P.*

Da un estremo A della retta AB si conduca, sotto un angolo qualunque, la retta AE, sulla quale, a partire dal punto A, si taglino le parti AC, CD, DE uguali alle rette date M, N, P; si congiunga il punto E col punto B, e dai punti C,D si conducano le rette CF,DH parallele ad EB; saranno le parti AF, FH, HB, della retta AB, rispettivamente proporzionali alle rette date M, N, P.

Scolio. Le rette AC, CD, DE si taglierebbero tutte uguali ad una retta qualunque se la AB volesse dividersi in parti uguali.

33. *Si vuol dividere una retta AB* (fig. 29) *in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra l'intera retta e la minore.*

Dall' estremo B s' innalzi sulla AB la perpendicolare BC; si tagli BC uguale alla metà di AB; si descriva col centro

C e col raggio CB la circonferenza BDE; si conduca pel punto A e pel centro C la secante AD, e si tagli AF = AE. Essendo AB una tangente ed AD una secante, si avrà

AD : AB : : AB : AE,

donde dividendo ed invertendo si à, a cagione di ED=AB e di AE=AF, la proporzione

AB : AF : : AF : FB,

che mostra essere la retta data AB divisa nel punto F nel modo dimandato.

Scolio. Questo modo di dividere una retta s'indica pure dicendo . . . dividere una retta in estrema e media ragione.

34. *Per un punto A* (fig. 30), *dato dentro di un angolo BCD, si vuol condurre una retta in modo che le sue parti intercette tra il punto dato ed i lati dell'angolo stiano fra loro nella ragione data di M ad N.*

Dal punto dato A si conduca la retta AE parallela al lato CB; sù questo lato si taglino le rette CF, FB in modo che stiano fra loro nella data ragione di M ad N; si congiunga il punto F col punto E; si conduca BD parallela ad FE, e pei punti D,A, si conduca la retta DAL, che sarà la retta dimandata.

Scolio. Se le due parti AD,AL si volessero uguali fra loro, si otterrebbe la retta DL tagliando solamente ED=EC, e congiungendo il punto D col punto dato A.

35. *Per un punto dato A* (fig. 31) *si vuol condurre una retta che vada a passare pel punto d'intersezione di due rette date BC, DE, che non possono prolungarsi fino al loro incontro.*

Pel punto dato A e per un'altro punto qualunque si conducano, in modo da tagliare le rette date, due rette CE, BD, parallele fra loro; si determini la quarta proporzionale in ordine alle tre rette CE, CA, BD, e sia X; si tagli BM=X, e si congiunga il punto ottenuto M col dato A; sarà AM la retta dimandata.

36. *Si vuol descrivere una circonferenza in modo che passi per due punti dati A,B, e sia tangente ad una retta data DE* (fig. 32).

Si congiungano i due punti dati A , B; si prolunghi la AB sino ad incontrare la DE in qualche punto D; si trovi la media proporzionale tra le rette DA , DB, e sia DE; dal punto E s'innalzi EC perpendicolare a DE; dal punto F medio di AB s'innalzi sulla medesima la perpendicolare FC; sarà il punto C , dove queste due perpendicolari s'incontrano, il centro della circonferenza dimandata, il raggio della quale sarà proprio la retta CE.

Scolio. Se la retta data LH fosse parallela alla retta che congiunge i punti dati A,B, il punto di contatto sarebbe proprio il punto H dove la perpendicolare FH incontra la LH; onde congiunto il punto H con uno dei punti dati A, ed innalzata sulla AH e dal suo punto medio M la perpendicolare MC, si avrebbe nell'intersezione C di questa perpendicolare colla FH il centro dimandato.

37. *Si vuol descrivere una circonferenza in modo che passi per un punto dato A* (fig. 33), *e sia tangente a due rette date BD , BE.*

Dei quattro angoli che formano le rette proposte si divida per metà, colla retta BF, quello che contiene il punto dato A; dal punto A si abbassi AF perpendicolare a BF, e si tagli FH=AF; sarà H un secondo punto della circonferenza dimandata; la quale si descriverà, come nel precedente problema , in modo che passi pei punti A , H, e tocchi una delle rette date BD , BE.

Scolio. Se le due rette proposte LM,NP fossero parallele, si condurrebbe prima alle rette date una parallela BF da loro equidistante, e si proseguirebbe quindi come si è detto.

38. *Si vuol descrivere una circonferenza in modo che tocchi tre rette date AB , AD , BD* (fig. 34) , *che s'intersecano.*

Si conduca la retta AC in modo che divida per metà l'angolo BAD; si conduca la BC in modo che divida per metà l'angolo ABD; dal punto C dove le rette AC,BC si tagliano,

si abbassi la perpendicolare CE su di una delle rette date; sarà C il centro, e CE il raggio della circonferenza dimandata.

Scolio. Per effetto della costruzione il punto C essendo ugualmente distante tanto dalla retta AD, quanto dall'altra BD, la bisettrice dell' angolo ADB, dovrà passare per C; onde può dirsi che le bisettrici degli angoli di un triangolo concorrono in un medesimo punto, che è proprio il centro del cerchio iscritto in detto triangolo.

Scolio. Questo problema è suscettibile di diverse soluzioni; noi però, nella figura data, abbiamo mostrata solo quella per la quale si à la circonferenza iscritta nel triangolo che colla loro scambievole intersezione formano le tre rette date.

39. *Con un raggio dato si vuol descrivere una circonferenza tangente a due rette non parallele AD, AE* (fig. 35).

Si determini la bisettrice AC dell'angolo DAE delle rette date; ad una di queste AD si conduca la perpendicolare qualunque DB, sulla quale si prenda, a partire dal suo piede, e nell'interno dell' angolo, la parte DB uguale al raggio dato; dal punto B si conduca alla retta AD la parallela BC, che taglierà la bisettrice AC in un punto C, il quale sarà proprio il centro della circonferenza dimandata.

40. *Si vuol costruire un quadrato equivalente ad un rettangolo dato.*

Si trovi la media proporzionale X tra la base B e l'altezza A del rettangolo dato; sarà X il lato del quadrato cercato.

Scolio. Una costruzione simile servirebbe a trovare il lato del quadrato equivalente ad un parallelogrammo, ad un triangolo, o ad un trapezio dato.

41. *Si vuol cambiare un poligono dato ABCDE* (fig. 36) *in un altro equivalente che abbia un lato di meno.*

Nel poligono dato si conduca una diagonale AC che lasci da una parte un triangolo ABC; dal vertice B di questo triangolo si conduca la parallela BF alla detta diagonale AC; si prolunghi la EA sino ad incontrare la BF, e si conduca la

CF. I due triangoli ABC,AFC sono equivalenti, perchè hanno la stessa base e la stessa altezza; dunque aggiungendo a ciascuno di essi la figura ACDE, si avrà pure che il poligono dato ABCDE è equivalente al poligono CDEF, che à un lato di meno.

Scolio. Questa costruzione essendo indipendente dal numero dei lati del poligono dato, mostra che ogni poligono, con successive trasformazioni, può cambiarsi in un triangolo equivalente, e quindi in un quadrato equivalente.

42. *Su di una retta data AB* (fig. 37), *come base, si vuol costruire un parallelogrammo che abbia uno degli angoli alla base uguale ad un angolo dato, e sia inoltre equivalente ad un rettangolo dato.*

All'estremo A della retta data AB si formi l'angolo BAD uguale al dato; sulla AE, perpendicolare ad AB, si tagli AE uguale alla quarta proporzionale X in ordine alla retta data AB, alla base, ed all'altezza del parallelogrammo dato; si conducano le rette EC, BC rispettivamente parallele ad AB, AD; sarà ABCD il parallelogrammo dimandato.

Scolio. Una costruzione simile si farebbe se il parallelogrammo dato si volesse equivalente ad un'altro parallelogrammo, ad un triangolo, o ad un trapezio dato.

43. *Si vuol costruire un quadrato equivalente alla somma, o alla differenza di due quadrati dati, i cui lati sono M ed N.*

Si conducano due rette BA, DC (fig. 38) fra loro perpendicolari.

1.°) Si tagli AB=M, AC=N, e si congiungano i punti B, C; sarà BC il lato del quadrato equivalente alla somma dei quadrati dati.

2.°) Si tagli AB uguale al lato minore, che supponesi essere M; col centro B, e con un raggio BD=N, si descriva una circonferenza, che taglierà la AD in un punto D; sarà AD il lato del quadrato equivalente alla differenza dei quadrati dati.

Scolio. Nel primo caso, se i quadrati dati fossero più di due, il problema si risolverebbe ripetendo successivamente,

come rilevasi facilmente dalla figura ABEFC, la stessa costruzione eseguita pel caso di due quadrati soli.

44. *Si vuol costruire un rettangolo in modo che sia equivalente ad un quadrato dato, e che abbia per somma, o per differenza della sua base e della sua altezza una retta data.*

1.°) Sulla retta data AB (fig. 39) come diametro si descriva una semicirconferenza; sulla AC, perpendicolare ad AB, si tagli AC uguale al lato del quadrato dato; si conduca CD parallela ad AB, e si abbassi da uno dei punti D, dove tale parallela taglia la semicirconferenza, la perpendicolare DE sulla AB; saranno AE ed EB la base e l'altezza del rettangolo cercato.

2.°) Sulla retta data AB (fig. 40) come diametro si descriva una circonferenza; sulla AD, perpendicolare ad AB, si tagli AD uguale al lato del quadrato dato, e si conduca pel punto D e pel centro C la secante DE; saranno DE e DF la base e l'altezza del rettangolo dimandato.

Scolio. Nel 1° caso il problema è impossibile quando il lato del quadrato dato è maggiore della metà della retta data AB.

45. *Si vuol costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato* (fig. 41) *nella ragione di N ad N.*

Su di una retta indefinita AC si taglino le due parti AB, BC, in modo che stiano fra loro nella ragione data di M ad N; sulla AC come diametro si descriva una semicirconferenza; dal punto B s'innalzi BD perpendicolare ad AC; si congiunga il punto D coi punti A, C; sulla DC, adiacente al segmento N del diametro AC, si tagli DE uguale al lato del quadrato dato, e si conduca EF parallela ad AC; sarà DF il lato del quadrato cercato.

Infatti poichè $DA : DC :: DF : DE$,

sarà pure $\overline{DA}^2 : \overline{DC}^2 :: \overline{DF}^2 : \overline{DE}^2$,

ma $\overline{DA}^2 : \overline{DC}^2 :: M : N$,

dunque $\overline{DF}^2 : \overline{DE}^2 :: M : N$.

46. *Dato un poligono ABCDE* (fig. 42) *ed una retta FH si vuole su questa retta, come lato omologo ad uno dei lati AB, del poligono dato, costruire un poligono simile al dato.*

Nel poligono dato, per un'estremo A del lato stabilito, si conduca la diagonale AC; ai punti F,H, della retta data FH, si formino gli angoli HFL, FHL rispettivamente uguali agli angoli BAC,ABC; e si avrà così il triangolo FHL simile all'altro ABC. Per l'estremo C della diagonale AC si conduca l'altra CE, e sulla FL si formi, come ora si è detto, il triangolo FLN simile ad ACE. Allo stesso modo facendo il triangolo LMN simile all'altro CDE si otterrà il poligono dimandato FHLMN.

47. *Dati due poligoni simili, se ne vuol costruire un terzo simile alli medesimi ed equivalente alla loro somma, o alla loro differenza.*

1.°) Si costruisca un triangolo rettangolo ABC (fig. 38) che abbia i suoi cateti AB, AC uguali a due lati omologhi dei poligoni dati; sull'ipotenusa ottenuta BC, come lato omologo a quelli considerati nei poligoni dati, si costruisca un poligono simile ai dati, e si avrà così il poligono domandato.

2.°) Si costruisca un triangolo rettangolo ABD che abbia un cateto AB, e l'ipotenusa BD, rispettivamente uguali a due lati omologhi dei poligoni dati; sul cateto ottenuto AD, come lato omologo a quelli considerati nei poligoni dati, si costruisca un poligono simile ai dati, e si avrà così il poligono richiesto.

48. *Si vuol costruire un poligono simile ad un poligono dato ABCDE* (fig. 42), *e che stia al medesimo nella ragione data di M ad N.*

Si trovi il lato FH del quadrato che sta al quadrato di un lato qualunque AB del poligono dato nella ragione di M ad N; sulla retta FH, come lato omologo ad AB, si costruisca un poligono FHLMN simile ad ABCDE, e si avrà così il poligono cercato.

49. *Si vuol costruire un poligono simile ad un poligono dato P, (fig. 43) ed equivalente ad un altro poligono dato Q.*

Si trovi il lato del quadrato equivalente al poligono P, e sia M; si trovi il lato del quadrato equivalente al poligono Q, e sia N; in ordine alle tre rette M, N ed uno dei lati AB del poligono P, al quale dev'esser simile il richiesto, si trovi la quarta proporzionale, e sia X; sulla retta X, come lato omologo ad AB, si costruisca il poligono Y simile a P; sarà Y il poligono cercato.

50. *Trovare due rette che abbiano fra loro lo stesso rapporto di due poligoni simili dati, dei quali M ed N sono due lati omologhi.*

Si costruisca un triangolo rettangolo ABC (fig. 44) che abbia i suoi cateti BA, BC uguali alle rette M ed N; sull'ipotenusa AC, di tale triangolo, si abbassi dal vertice B la perpendicolare BD; saranno AD e DC le rette dimandate.

51. *Trovare due rette che abbiano fra loro lo stesso rapporto di due rettangoli dati; di cui* A *ed* a *sono le altezze,* B *e* b *le basi.*

Si trovi la quarta proporzionale X in ordine alle tre rette date A, a, b, e si avrà la proporzione

$$A : a :: b : X,$$

e quindi l'eguaglianza

$$A \times X = a \times b$$

Nella proporzione identica

$$A \times B : a \times b :: A \times B : a \times b,$$

si ponga in vece del prodotto $a \times b$, che è nel secondo rapporto, il prodotto uguale $A \times X$, e si avrà l'altra proporzione

$$A \times B : a \times b :: A \times B : A \times X,$$

ovvero $$A \times B : a \times b :: B : X;$$

dalla quale si scorge essere B ed X le due rette domandate.

52. *Si vuol costruire un cerchio la cui circonferenza, o la cui superficie, stia alla circonferenza, o alla superficie di un cerchio dato, nella ragione data di M ad N.*

1.°) Si trovi una retta X che stia al raggio R, del cer-

chio dato, come M sta ad N; sarà X il raggio del cerchio la cui circonferenza sta alla data nella ragione di M ad N.

2.°) Si trovi il lato X del quadrato che sta al quadrato del raggio R, del cerchio dato, nella ragione di M ad N; sarà X il raggio del cerchio la cui superficie sta a quella del cerchio dato nella ragione di M ad N.

53. *Si vuole iscrivere un quadrato in un cerchio.*

Si conducano due diametri AD,BE (fig. 45) l'uno perpendicolare all'altro; si congiungano fra loro gli estremi di questi diametri colle corde AB, BD, DE, EA; sarà ABDE il quadrato cercato.

Scolio. Per mezzo del quadrato iscritto potranno iscriversi e circoscriversi al cerchio i poligoni regolari di 8, 16, 32, 64,... lati.

Scolio. La iscrizione di un poligono regolare di un numero qualunque n di lati, in una circonferenza data, riducesi a determinare geometricamente la *ennesima parte* della circonferenza data.

Scolio. Indicando con R il raggio AC del cerchio dato, e con L il lato AB del quadrato iscritto, dal triangolo ACB, che è rettangolo ed isoscele, si à l'eguaglianza $L^2 = 2R^2$, e quindi la formola

$$L = R\sqrt{2},$$

che esprime il lato del quadrato iscritto in funzione del raggio.

54. *Si vuole iscrivere un esagono regolare in un cerchio.*

Si adatti la corda AB (fig. 46) uguale al raggio AC, e si avrà nell'arco sotteso AB la sesta parte della circonferenza; cosicchè portando successivamente il detto raggio sei volte di seguito, come corda, si ricadrà sul punto donde si è partiti, e si otterrà l'esagono regolare iscritto.

Per gli estremi della corda AB si conducano i raggi AC, BC. Il triangolo ABC è equiangolo perchè equilatero; dunque l'angolo ACB è terza parte di due retti, ovvero sesta parte di quattro; per conseguenza l'arco AB che lo misura è, per come si è detto, sesta parte della circonferenza.

Coroll. Congiungendo alternatamente fra loro i vertici dell'esagono regolare iscritto ABDEFH, si avrà il triangolo equilatero iscritto ADF.

Scolio. Per mezzo dell'esagono regolare iscritto potranno iscriversi e circoscriversi al cerchio i poligoni regolari di 3, 6, 12, 24. 48... lati.

Scolio. Dal quadrilatero ABDC, che è un parallelogrammo, perchè à i lati uguali, si à l'eguaglianza

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AC}^2.$$

Questa eguaglianza, osservando essere $BC=AC$, ed indicando con L il lato AD del triangolo equilatero iscritto, e con R il raggio AC, si cambia nell'altra $L^2=3R^2$, dalla quale si ricava la formola seguente

$$L=R\sqrt{3},$$

che esprime il lato del triangolo equilatero iscritto in funzione del raggio.

55. *Si vuole iscrivere un decagono regolare in un cerchio.*

Si divida il raggio AC (fig. 47) in estrema e media ragione nel punto B, in modo che sia

$$AC : BC :: BC : AB;$$

si adatti la corda AD uguale alla parte maggiore CB, del raggio così diviso, e si avrà nell' arco sotteso AD la decima parte della circonferenza; cosicchè adattando, come corda, la detta parte BC dieci volte di seguito, si ricadrà nel punto di partenza, e si otterrà il decagono regolare iscritto.

Si congiunga il punto D coi punti C e B. La proporzione precedente, a cagione di $AD=BC$, si cambia nell'altra

$$AC : AD :: AD : AB,$$

che mostra essere simili i due triangoli CAD,BAD; perchè hanno l'angolo A comune, compreso fra lati AC ed AD rispettivamente proporzionali ai lati AD ed AB; ma il primo di questi triangoli è isoscele, dunque anche il secondo è isoscele, e perciò $DA=DB$; ma è pure $DA=BC$; dunque $DB=BC$. Posto ciò nel triangolo BDC essendo gli angoli BDC, BCD uguali, perchè opposti a lati uguali, sarà l'angolo esterno ABD, che è quanto la loro somma, doppio di uno di essi

BCD; ma l'angolo ABD è uguale a DAC, dunque pure DAC è doppio di ACD; ma l'angolo DAC è uguale ad ADC, dunque pure ADC è doppio di ACD; onde il triangolo ACD avendo ciascuno degli angoli alla base AD doppio dell'angolo al vertice C, sarà questo la quinta parte di due retti, ovvero la decima parte di quattro; per conseguenza l'arco AD che lo misura sarà pure la decima parte della circonferenza.

Coroll. Congiungendo alternatamente fra loro i vertici del decagono regolare iscritto si avrà il pentagono regolare iscritto.

Scolio. Per mezzo del decagono regolare iscritto potranno iscriversi e circoscriversi al cerchio i poligoni regolari di 5, **10**, 20, 40, 80... lati.

Scolio. Dalla proporzione AC : AD : : AD : AB, indicando con R il raggio AC del cerchio, con L il lato del decagono regolare iscritto, cioè la parte maggiore BC del raggio, ed osservando essere $AB = AC - BC = R - L$, si ricava

$$L^2 = R(R - L),$$

ovvero

$$L^2 + RL - R^2 = 0.$$

Questa equazione di 2.° grado risoluta dà per L due espressioni diverse, delle quali una è numericamente minore e l'altra maggiore del raggio. La prima di queste, che è

$$L = \tfrac{1}{2} R(\sqrt{5} - 1),$$

esprime il lato del decagono regolare iscritto in funzione del raggio.

56. *Si vuole iscrivere un pentadecagono regolare in un cerchio.*

A partire da uno stesso punto E (fig. 47) della circonferenza si adatti la corda EH uguale al lato dell'esagono regolare iscritto, e la corda EF uguale al lato del decagono regolare pure iscritto; e si avrà nell'arco FH la quindicesima parte della circonferenza; cosicchè adattando sulla circonferenza quindici volte di seguito la corda dell'arco FH si ricadrà nel punto di partenza, e si otterrà il pentadecagono regolare iscritto. Ciò deriva dacchè l'arco FH essendo differenza dei due EH, EF, sarà uguale ad un sesto me-

no un decimo , ovvero ad un quindicesimo della circonferenza.

Scolio. Per mezzo del pentadecagono regolare iscritto potranno iscriversi e circoscriversi pure i poligoni regolari di 30, 60, 120, 240... lati.

FINE.

Libro Primo.